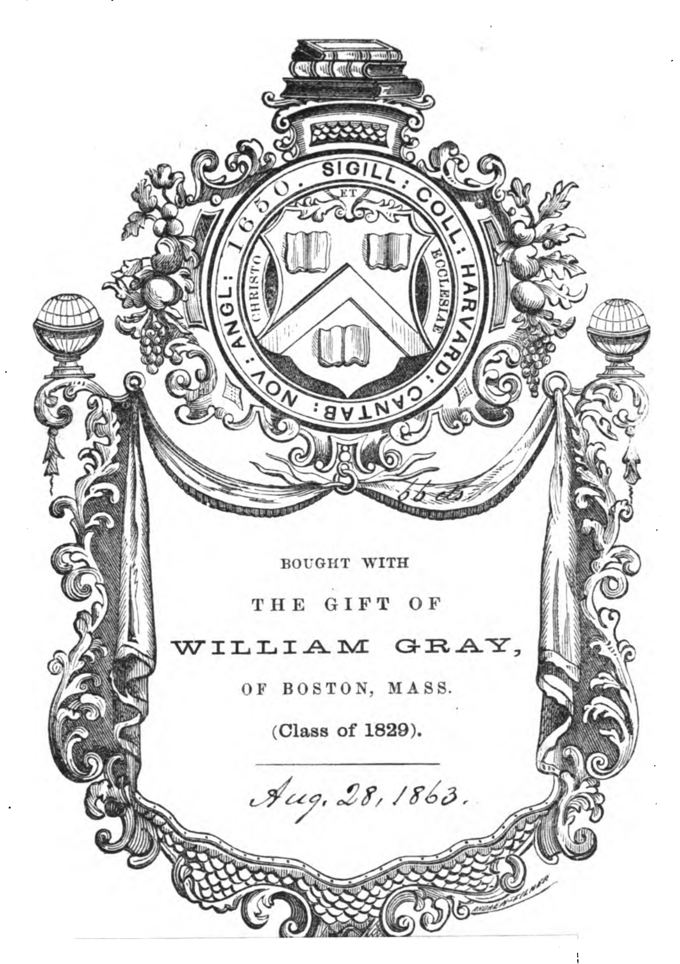
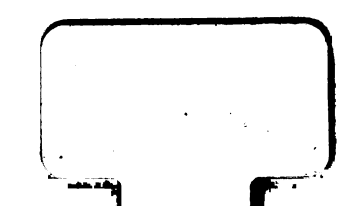



SIGILL : COLL : HARVARD : CANTAB : NOV : ANGL : 1650.
CHRISTO
ET
ECCLESIAE
BOUGHT WITH
THE GIFT OF
WILLIAM GRAY,
OF BOSTON, MASS.
(Class of 1829).
Aug. 28, 1863.



ÜBER DIE BERECHNUNG

DER

FLÄCHEN-INHALTE

GANZ ODER ÜBERWIEGEND

AUS ORIGINAL-MAASSEN

VON

J. J. VORLÆNDER,

KÖNIGLICH PREUSSISCHER STEUERRATH.

LEIPZIG.

COMMISSIONSVERLAG VON B. G. TEUBNER.

1858.

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

Vorwort.

Die Ermittelung der Flächen-Inhalte gemessener Figuren ist ein so sehr elementarer Gegenstand, ist so vielfältig in den Lehrbüchern der praktischen Feldmesskunst abgehandelt, dass es von vorn herein als ein bedenkliches Unternehmen erscheinen muss, darüber vor dem mathematischen Publikum überhaupt noch etwas zu sagen. Zwei Gründe bestimmen mich indessen, über diese Bedenklichkeit hinwegzugehen. Der erstere besteht in der thatsächlichen Werthzunahme des Grundeigenthums und der daraus hervorgehenden Steigerung in den Anforderungen hinsichtlich der Genauigkeit geometrischer Ermittelungen, der andere in der Wahrnehmung, dass es bei den ausübenden Feldmessern, ungeachtet jener Einfachheit der Berechnungsformen, an einer gründlichen Bekanntschaft mit dem bei ihrer Anwendung zweckmässigen Verfahren gar oft noch mangelt. Jene Steigerung in den Anforderungen spricht sich am deutlichsten darin aus, dass die amtlichen Vorschriften immer mehr auf Berechnung der Flächeninhalte aus Originalmaassen, den Coordinaten und andern Abständen, welche der Geometer bei seiner Feldoperation unmittelbar von den Instrumenten abgelesen hat, dringen, dass die Berechnungsmaschine (der Planimeter) immer mehr in ihrer Anwendbarkeit beschränkt wird, immer grösseres Gewicht auf den Umstand gelegt wird, dass die Flächenberechnung aus Originalmaassen wohl noch dem Irrthum, aber keinem Fehler* unterworfen ist.

Dieser Steigerung der Anforderungen an die Genauigkeit der Flächen-Ermittelungen tritt der praktische Geometer mit der Klage entge-

*) Der Irrthum entspringt hier aus dem Mangel zureichender Aufmerksamkeit, der Fehler aus dem Mangel an absoluter Genauigkeit der Karte und der Berechnungswerkzeuge und aus der Unvollkommenheit sinnlicher Wahrnehmungen.

gen, dass die Berechnung der Flächen aus Originalmaassen einen bedeutenden Ziffern-Apparat erfordere, dass die Arbeit dadurch leicht zu mühsam und zu zeitraubend würde. Wer die Sache lediglich aus theoretischen Gesichtspunkten betrachtet, wird geneigt sein, die Klage vornehm abzuweisen. Aber der Theoretiker weiss es vielleicht nicht oder übersieht, dass bei grossen Landesvermessungen nur etwa 4 Pfennige für den Morgen und ebenso viel für die berechnete Parzelle bezahlt werden, auch bei der bedeutenden Höhe der Gesammtkosten solcher Operationen zur Zeit nicht mehr gezahlt werden kann und dass dieser augenscheinlich geringe Verdienst kaum hinreicht, die Subsistenz eines Menschen zu sichern.

Die Bedenken des praktischen Geometers erfordern also die sorgfältigste Beachtung, aber es darf ihnen auch nicht weiter Raum gegeben werden, als dieses nach genauer Feststellung des Arbeits-Minimums nothwendig erscheint. Es entsteht mithin die Aufgabe, die Arbeit der Flächenberechnung aus Originalmaassen auf ihren geringsten Umfang einzuschränken und, falls dieser noch über die verfügbaren Kräfte hinausgehen sollte, die Hülfsmittel anzugeben, welche bei einem Nachlassen von der ganzen Strenge des Grundsatzes eine erhebliche Arbeitsverminderung ohne unzulässige Verluste an der Genauigkeit der Resultate gestatten.

Diese Aufgabe ist, wenn auch ohne theoretisches Interesse, doch für die Anwendung der Mathematik auf das Leben von grosser Wichtigkeit. Im Gefühl derselben habe ich mich entschlossen, aus einer ziemlich umfangreichen Erfahrung zu ihrer Lösung die nachstehenden Beiträge zu liefern.

Minden, den 3. October 1857.

Vorlænder.

I. Abschnitt.

Berechnung der Flächen lediglich aus Originalmaassen.

§. 1.

Es versteht sich von selbst, dass in dieser Abhandlung auf die, ohnehin immer mehr aus dem Leben verschwindenden graphischen Messungs-Methoden keine Rüchsicht genommen werden kann. Der Messtisch liefert nur ein Bild, aber keine Zahlen, und wo seine Anwendung darauf beschränkt wird, Netzpunkte für die Detail-Aufnahme festzulegen, zwischen denen dann die Grenzpunkte der Grundstücke mit der Messkette oder der Latte bestimmt und wo die von diesen abgelesenen Maasse zur Flächenberechnung mit benutzt werden können, da fällt das Verfahren mit der im zweiten Abschnitte dieser Schrift auseinander gesetzten Benutzung der bei Anwendung besserer Vermessungsmethoden entstandenen Karten zusammen.

Ebenso wenig kann von der Boussole die Rede sein, so lange die mit ihr noch operirenden Feldmesser unterlassen, die Coordinaten der Winkelpunkte aus ihren Azimutsal- und Längenvermessungen zu berechnen, statt die Züge auf mechanischem Wege aufzutragen. Geschähe Ersteres aber, so würde das Werk der Form nach mit dem Ergebniss einer Theodolit- und Messketten-Operation zusammenfallen, also auch dann kein Grund vorliegen, der Boussolenmessungen besonders zu gedenken. Im Uebrigen ist es gleichgültig, ob die Operationslinien wie in den ebenen Ländern mit Messketten oder in den Gebirgsgegenden mit Messstäben, Latten, Ruthen gemessen werden.

Wir setzen also voraus, dass die ihrem Flächen-Inhalte nach zu berechnenden Figuren mittelst rechtwinkliger Coordinaten gegen eine oder mehrere ihrer gegenseitigen Lage nach bestimmten Abscissen-Achsen gegeben sind.

§. 2.

Die gewöhnliche Vorstellung der praktischen Feldmesser von den Coordinaten hat etwas Einseitiges, welches ihrer Benutzung hinderlich ist. Unter den Abscissen verstehen sie die Abstände der Ordinaten-Fusspunkte von einem in einer geraden Linie liegenden Anfangspunkte, unter den Ordinaten die senkrechten Entfernungen der durch die Coordinaten zu bestimmenden Punkte von dieser Linie, der Abscissenlinie. Diese Vorstellung ist zwar richtig, aber es ist der klaren Einsicht in das Wesen der Coordinaten förderlicher, wenn man sich in dem Anfangspunkt der Abscisse eine nach beiden Seiten derselben rechtwinklig durchgezogene unbestimmt lange, gerade Linie denkt, und diese Linie ebenso als Ordinaten-Achse, wie die Abscissenlinie als Abscissen-Achse betrachtet. Die Abscissen sind dann nichts Anderes als die senkrechten Abstände der zu bestimmenden Punkte von der Ordinaten-Achse, die Ordinaten die senkrechten Abstände von der Abscissen-Achse. Es bleibt

jetzt nur noch übrig, die der Willkühr des Rechners anheim gegebene Entscheidung zu treffen, nach welcher Seite der Abscissen-Achse die positiven Ordinaten, und nach welcher Seite der Ordinaten-Achse die positiven Abscissen gefunden werden sollen. Die nach den entgegengesetzten Seiten liegenden Abstände müssen dann mit dem Minuszeichen belegt werden.

Die Ordinaten bezeichnen wir mit dem Buchstaben y, die Abscissen mit x, den Flächen-Inhalt mit F; die durch y und x bestimmten Punkte nummeriren wir von 1 anfangend, oder denken sie uns wenigstens nummerirt, so nämlich, dass von dem mit 1 belegten Punkte aus in der Umfangslinie des Vielecks über die Punkte 2, 3 u. s. w. fortgegangen wird bis zum letzten Punkte, der in den Formeln auch wohl mit dem allgemeinen Zeichen n belegt wird, von wo dann der Zug in den Anfangspunkt 1 zurückläuft. Es ist nicht unwichtig, dass der Rechner für den Umlauf der Figuren eine bestimmte Drehungsweise, etwa die von Norden über Osten, Süden und Westen nach Norden zurück sich zur festen Regel mache.

Für die einzelnen Punkte eines Vielecks sind hiernach:

die Abscissen $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots\ldots x_{n-1}, x_n$.

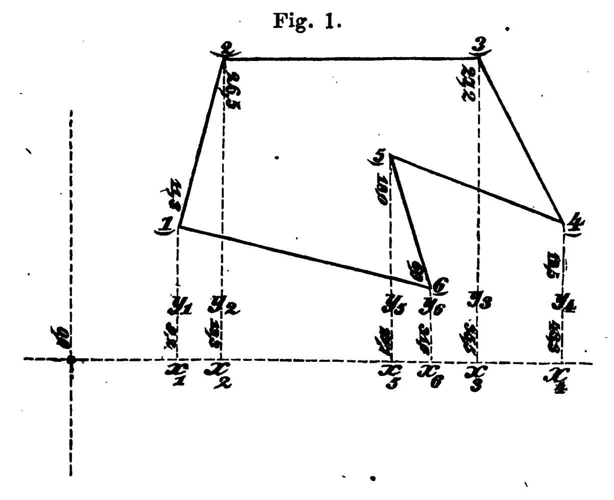
die Ordinaten $y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots\ldots\ldots y_{n-1}, y_n$.

§. 3.

Viele Geometer berechnen noch die Flächeninhalte der Vielecke, indem sie die einzelnen, zwischen den auf die Abscissenlinie fallenden Ordinaten enthaltenen, Parallel-Trapeze der Reihe nach behandeln und dann von der Flächensumme der die Figur umfassenden Trapeze die Summe der sie ausschliessenden Trapeze abziehen.

Dieses Verfahren ist aber ungeschickt. Ist ein für allemal festgestellt, nach welcher Seite die Ordinaten und nach welcher die Abscissen positiv genommen werden sollen, so entscheidet allerdings der Anblick der Figur, ob eine Ordinate oder Abscisse mit dem Zeichen + oder mit — in der Rechnung auftreten muss. Aber man kann unter Umständen leicht darin irren, ob eins jener Trapeze zum Minuendus oder zum Subtrahendus gezählt werden muss.

Fig. 1.



In der Figur 1 z. B. könnte ein Rechner gar leicht in den Irrthum verfallen, dass das Viereck x_5, 5, 6, x_6 den abzüglichen Trapezen zugesetzt werden müsse.

Es fehlt dem Verfahren an der algebraischen Form. Diese verlangt, dass zunächst alle Trapeze positiv gesetzt, dass in ihren Factoren den einzelnen Ordinaten und Abscissen die ihrer Lage entsprechenden Zeichen beigelegt, und dann den Regeln der Multiplikation die Entscheidung überlassen werde, ob das einzelne Product zusätzlich oder abzüglich zu behandeln sei.

Für jedes der gedachten Trapeze finden wir den doppelten Flächeninhalt, wenn wir die Summe seiner beiden Ordinaten mit seiner Höhe, d. h. mit dem Unterschiede zwischen den Abscissen der beiden betreffenden Umfangspunkte der Figur multipliciren. Bei der Herstellung dieses Unterschiedes muss aber immer die Abscisse des im Umlaufe der Figur vorangehenden Punktes von der des nachfolgenden algebraisch abgezogen werden. Wir würden also den Flächeninhalt der vorstehenden Figur durch die Formel ausdrücken können:

$$2\,F = (y_1 + y_2)\,(x_2 - x_1) + (y_2 + y_3)\,(x_3 - x_2) + (y_3 + y_4)\,(x_4 - x_3) + (y_4 + y_5)\,(x_5 - x_4) + (y_5 + y_6)\,(x_6 - x_5) + (y_6 + y_1)\,(x_1 - x_6).$$

Da x_6 grösser ist als x_5, so sehen wir, dass das oben erwähnte fünfte Product positiv ausfällt, also nicht in Abzug sondern in Zurechnung gebracht werden muss.

Augenscheinlich kann die vorstehende Formel in folgender Art verallgemeinert werden; für ein Vieleck von n Punkten ist:

$$2\,F = (y_1 + y_2)\,(x_2 - x_1) + (y_2 + y_3)\,(x_3 - x_2) + \ldots (y_{n-1} + y_n)\,(x_n - x_{n-1}) + (y_n + y_1)\,(x_1 - x_n).$$

In jedem Gliede dieser Formel muss der eine Factor durch Addition, der andere durch Subtraction gebildet werden. Eine dieser Operationen ist überflüssig.

Führen wir nämlich die in der Formel blos angezeigte Multiplication theilweise aus, so finden wir:

$$\begin{aligned} 2\,F_n = & \; y_1\,(x_2 - x_1) + y_2\,(x_2 - x_1) \\ & + y_2\,(x_3 - x^2) + y_3\,(x_3 - x_2) \\ & + y_3\,(x_4 - x_3) + y_4\,.\,(x_4 - x_3) \\ & \qquad \vdots \\ & + y_{n-2}\,(x_{n-1} - x_{n-2}) + y_{n-1}\,(x_{n-1} - x_{n-2}) \\ & + y_{n-1}\,(x_n - x_{n-1}) + y_n\,(x_n - x_{n-1}) \\ & + y_n\,(x_1 - x_n) + y_1\,(x_1 - x_n) \end{aligned}$$

Im ersten Gliede dieser Entwickelung ist y_1 Factor von $(x_2 - x_1)$, im letzten von $(x_1 - x_n)$, also in beiden zusammen von $(x_2 - x_1) + (x_1 - x_n) = (x_2 - x_n)$.

Ebenso ist y_2 im zweiten Gliede Factor von $(x_2 - x_1)$, im dritten von $(x_3 - x_2)$, in beiden zusammen von $(x_3 - x_1)$ u. s. w. Die Formel zieht sich also zusammen auf:

No. 1. $2 F_n = y_1 (x_2 - x_n) + y_2 (x_3 - x_1) + y_3 (x_4 - x_2) + \ldots y_{n-1} (x_n - x_{n-2}) + y_n (x_1 - x_{n-1}).$

Zwischen der Abscisse und der Ordinate findet nach der im §. 2 gedachten allgemeineren Anschauungsweise ein wesentlicher Unterschied nicht statt, wir können sie also mit einander vertauschen, daher auch schreiben:

No. 2. $-2 F_n = x_1 (y_2 - y_n) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_4 - y_2) + \ldots x_{n-1} (y_n - y_{n-2}) + x_n (y_1 - y_{n-1}),$

wobei nur zu beachten ist, dass eine Vertauschung der Buchstaben in der Formel No. 1 nothwendig eine Aenderung aller Zeichen zur Folge haben muss, wovon man sich auch durch Ausführung der in der Formel No. 1 angezeigten Multiplikationen nach geschehener Vertauschung der Buchstaben leicht überzeugen kann.

Das allgemeine oder k^{te} Glied in diesen Formeln ist

in No. 1 $= y_k (x_{k+1} - x_{k-1})$
- - 2 $= x_k (y_{k+1} - y_{k-1})$

In Worten ausgedrückt lauten die Formeln:

„Um die doppelte Fläche zu finden, multiplicire man:

entweder:

„jede Ordinate mit dem Unterschiede zwischen der ihr nachfolgenden und der ihr vorhergehenden Abscisse“

oder:

„jede Abscisse mit dem Unterschiede zwischen der ihr nachfolgenden und der ihr vorhergehenden Ordinate“

und

„addire bei dem einen wie bei dem anderen Verfahren die Producte algebraisch, ändere auch bei dem letzteren das Zeichen des Resultats“.

§. 4.

Die beiden im §. 3 entwickelten Formeln geben wichtige Kontrolen an die Hand.

Zunächst müssen, wie man sogleich ersieht, die Summen der Klammergrössen $= 0$ sein, nämlich:

$$(x_2 - x_n) + (x_3 - x_1) + (x_4 - x_2) + \ldots (x_n - x_{n-2}) + (x_1 - x_{n-1}) = 0$$
$$(y_2 - y_n) + (y_3 - y_1) + (y_4 - y_2) + \ldots (y_n - y_{n-2}) + (y_1 - y_{n-1}) = 0$$

Es kömmt nämlich jeder Werth in je zwei nächsten ungeraden und geraden Gliedern einmal unter dem Zeichen $+$, das anderemal unter dem Zeichen $-$ vor, und es findet also ein gegenseitiges Aufheben sämmtlicher Glieder statt. Werden also die Abscissen- oder die Ordinaten-Unterschiede in besonderen Spalten des Rechnungsformulars gesammelt, so versichert ihre algebraische Summe $= 0$ die Richtigkeit der einzelnen Subtractionen.

Wird ferner dasselbe Vieleck einmal nach der Formel No. 1, das anderemal nach No. 2 berechnet, so kontrolirt sich die Multiplikation und Summirung der Producte.

Unkontrolirt bleibt daher in isolirten Vielecken nur das Ausschreiben der

Ordinaten und Abscissen aus dem Vermessungs-Manual; daher auf diesen Theil der Arbeit die grösste Aufmerksamkeit verwendet werden muss.

In zusammenhängenden und auf die nämlichen Coordinaten-Achsen bezogenen Vielecken kontroliren sich für jeden zwischen zwei nachbarlichen Vielecken gemeinschaftlichen Linienzug die Geschäfte der Ausschreibung, der Unterschied-Bildung und der Multiplikation.

§. 5.

Wenden wir beispielsweise die Formeln des §. 3 auf die Maasse der eben daselbst gebrauchten Figur I an und verweisen wir nach §. 4 die Ordinaten, Abscissen, deren Unterschiede und die Producte in besondere Spalten, so erhalten wir:

Nummer.	y	x	$y_{k+1}-y_{k-1}$	$x_{k+1}-x_{k-1}$	$y_k\,(x_{k+1}-x_{k-1})$	$x_k\,(y_{k+1}-y_{k-1})$
1	+ 11,3	+ 9,2	+ 19,6	— 18,3	— 206,79	+ 180,32
2	+ 26,5	+ 13,3	+ 15,9	+ 26,3	+ 696,95	+ 211,47
3	+ 27,2	+ 35,5	— 14,0	+ 30,0	+ 816,00	— 497,00
4	+ 12,5	+ 43,3	— 9,2	— 7,8	— 97,50	— 398,36
5	+ 18,0	+ 27,7	— 5,6	— 11,7	— 210,60	— 155,12
6	+ 6,9	+ 31,6	— 6,7	— 18,5	— 127,65	— 211,72
			+ 35,5	+ 56,3	+ 1512,95	+ 391,79
			— 35,5	— 56,3	— 642,54	— 1262,20
			0	0	+ 870,41	— 870,41
				$F =$	435,205	435,205

Es bedarf wohl kaum der Erläuterung, dass der erste Ordinaten-Unterschied entsteht, wenn von der zweiten die letzte Ordinate und der letzte, wenn von der ersten die vorletzte Ordinate abgezogen wird und dasselbe bei der Abscisse stattfindet.

§. 6.

Die Anzahl der nach den Formeln No. 1 und 2 zu bildenden Producte kann um eins vermindert werden.

Wollten wir, um uns davon zu überzeugen, beispielsweise in der Formel No. 1 den Ordinaten-Factoren eine constante Grösse c zu- oder absetzen, und, was aus der Summe dann entstehen möchte, mit $2\,M_n$ bezeichnen, so erhielten wir:

$$2\,M_n = (y_1 \pm c)\,(x_2 - x_n) + (y_2 \pm c)\,(x_3 - x_1) + (y_3 \pm c)\,(x_4 - x_2) + \ldots (y_n \pm c)\,(x_1 - x_{n1})$$
$$= y_1\,(x_2 - x_n) + y_2\,(x_3 - x_1) + y_3\,(x_4 - x_2) + \ldots y_n\,(x_1 - x_{n-1})$$
$$\pm\, c\,[(x_2 - x_n) + (x_3 - x_1) + (x_4 - x_2) + \ldots (x_1 - x_{n-1})]$$

Die erste von den beiden letzten Zeilen ist aber nichts Anderes als $2\,F_n$, die letztere das Product einer constanten Zahl und eines Ausdrucks, welcher nach §. 4 $= 0$ ist. Wir erhielten daher:

$$2\,M_n = 2\,F_n + 0.$$
$$\text{also}\quad M_n = F_n$$

Demnach können wir jeder Ordinate eine beliebige constante Grösse zusetzen, ohne dass der Werth des Ausdrucks dadurch eine Veränderung erleidet; ja wir können diese Constante so wählen, dass irgend ein Glied des Ausdrucks in Folge dessen verschwinden muss. Setzen wir z. B. allen Ordinaten-Factoren der Formel No. 1 die Grösse $-y_1$ zu, so erhalten wir:

$$2F_n = (y_1 - y_1)(x_2 - x_n) + (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) + (y_3 - y_1)(x_4 - x_2) + \ldots (y_n - y_1)(x_1 - x_{n-1})$$

d. h.

No. 3. $$2F_n = (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) + (y_3 - y_1)(x_4 - x_2) + \ldots (y_n - y_1)(x_1 - x_{n-1})$$

Auf demselben Wege finden wir:

No. 4. $$-2F_n = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) + (x_3 - x_1)(y_4 - y_2) + \ldots (x_n - x_1)(y_1 - y_{n-1})$$

Hinsichtlich der im §. 4 erwähnten Summenkontrole der Klammergrössen, darf übrigens nicht unbeachtet bleiben, dass in den Formeln No. 3 und 4 die Klammergrössen fehlen, neben denen der andere Factor 0 geworden ist: die gedachten Summen müssen also jetzt diesen Klammergrössen mit entgegengesetzten Zeichen gleich kommen. Man thut daher wohl, diese Grössen immerhin mit aufzuführen, wenn sie auch nach geschehener Kontrolirung nicht ferner gebraucht werden.

Das Beispiel des §. 5 würde nach der Formel No. 3 folgende Rechnung erfordern:

y	x	$y_k - y_1$	$x_{k+1} - x_{k-1}$	$(y_k - y_1)(x_{k+1} - x_{k-1})$
+ 11,3	+ 9,2	0	− 18,3	0
+ 26,5	+ 13,3	+ 15,2	+ 26,3	+ 399,76
+ 27,2	+ 35,5	+ 15,9	+ 30,0	+ 477,00
+ 12,5	+ 43,3	+ 1,2	− 7,8	− 9,36
+ 18,0	+ 27,7	+ 6,7	− 11,7	− 78,39
+ 6,9	+ 31,6	− 4,4	− 18,5	+ 81,40
			+ 56,3	+ 958,16
			− 56,3	− 87,75
			0	+ 870,41
			$F =$	435,205

Bei Vielecken von beträchtlicher Seitenzahl ist die Ersparung eines Products von geringem Werthe, ja dieser wird von der Mühe, von allen Ordinaten eine derselben abzuziehen, weit überwogen. Dennoch ist der Satz, worauf das Verfahren beruht, wichtig, wo es nöthig ist, unbequem grosse Factoren auf kleinere Zahlen zurück zu führen. Wenn z. B. die Fläche eines Vielecks berechnet werden soll, dessen Winkelpunkte durch Coordinaten gegeben sind, welche unmittelbar auf den Coordinaten-Achsen des einer ganzen Provinz gemeinsamen Kardinalpunktes ruhen, dann muss der Rechner Sorge tragen, durch Absetzung entweder irgend einer Ordinate oder Abscisse von allen übrigen oder eines vollen Tausend u. s. w. der Maasseinheit von allen ausser den Klammern der Formeln No. 1 und 2 stehenden Factoren ein allzu grosses Ueberwiegen derselben über die Klammergrössen zu vermeiden.

§. 7.

Eine Verminderung in der Anzahl der Producte kann noch auf einem anderen Wege erstrebt werden.

Bekanntlich kann jedes Polygon von gerader Seitenzahl n in $\frac{n-2}{2}$ Vierecke und jedes Polygon von ungerader Seitenzahl m in $\frac{m-3}{2}$ Vierecke und 1 Dreieck durch Diagonalen zerlegt werden.

Jedes dieser Vierecke, beziehungsweise Dreiecke, kann nach den obigen Formeln besonders berechnet werden. Die Summe ihrer Flächen muss die Vielecksfläche herstellen. Die Formeln No. 1 und No. 2 unterliegen nun in ihrer Anwendung auf das Dreieck und das Viereck einer nicht unerheblichen Abkürzung, und es ist wenigstens gedenkbar, dass die daraus hervorgehende Arbeits-Ersparung auch dem Vieleck nach jener Zerlegung theilhaftig werden kann.

Die Rechnungs-Abkürzung bei dem Dreieck folgt schon aus dem §. 6. Setzen wir $n = 3$, so ist nach Formel No. 1:

$$2\,F_3 = y_1\,(x_2 - x_3) + y_2\,(x_3 - x_1) + y_3\,(x_1 - x_2)$$

Ziehen wir aber von allen Ordinaten y_1 ab, so geht dieser Ausdruck zusammen auf:

$$2\,F_3 = (y_2 - y_1)\,(x_3 - x_1) + (y_3 - y_1)\,(x_1 - x_2) \qquad \text{No. 5.}$$

Ebenso finden wir:

$$-\,2\,F_3 = (x_2 - x_1)\,(y_3 - y_1) + (x_3 - x_1\,(y_1 - y_2)$$

Jedes coordinirte Dreieck kann also in zwei Producten berechnet werden.

Setzen wir $n = 4$, so ist nach Formel No. 1

$$2\,F_4 = y_1\,(x_2 - x_4) + y_2\,(x_3 - x_1) + y_3\,(x_4 - x_2) + y_4\,(x_1 - x_3)$$

In diesem Ausdrucke sind die Klammergrössen im ersten und dritten, im zweiten und vierten Gliede gleich, aber von entgegengesetztem Zeichen; er zieht sich also zusammen auf:

$$2\,F_4 = (y_1 - y_3)\,(x_2 - x_4) + (y_2 - y_4)\,(x_3 - x_1). \qquad \text{No. 6.}$$

Aus der Formel No. 2 würde hervorgehen:

$$-\,2\,F_4 = (x_1 - x_3)\,(y_2 - y_4) + (x_2 - x_4)\,(y_3' - y_1)$$

welcher Ausdruck mit No. 6 augenfällig identisch ist.

Die Fläche jedes coordinirten Vierecks kann also ebenfalls in zwei Producten berechnet werden. Erfordert nun jedes der $\frac{n-2}{2}$ Vierecke, in welche das Vieleck von der geraden Seitenzahl n zerlegt werden kann, 2 Producte, so folgt, dass die Fläche des Vielecks selbst $n - 2$ Producte in Anspruch nimmt. Jedes der $\frac{m-3}{2}$ Vierecke des Vielecks von der ungeraden Seitenzahl m erfordert 2, sie alle zusammen also $m - 3$ Producte. Dazu kommen noch die 2 Producte des sie zum Vieleck ergänzenden Dreiecks, das ganze Vieleck erfordert also $m - 1$ Producte.

Nun erheischten die Formeln No. 3 und 4 nur $n - 1$ Producte. Für das Vieleck mit ungerader Seitenzahl ist also durch obige Zerlegung nichts zu gewinnen und nur bei dem Vieleck von gerader Seitenzahl kann damit noch ein Product erspart werden.

Es ist gleichgültig, wie dabei die Diagonalen gezogen werden und daher am bequemsten, sie alle vom Anfangspunkte der Rechnung ausgehen zu lassen. Auch ist es bei der algebraischen Allgemeingültigkeit der Formeln ohne Einfluss, wenn die Diagonalen theilweise ausserhalb der Figur liegen. Hiernach wäre:

das 1. Viereck = 1, 2, 3, 4
" 2. " = 1, 4, 5, 6
" 3. " = 1, 6, 7, 8
.
.
.
" n^{te} " = 1, $n-2$, $n-1$, n.

Die allgemeine Formel für die Fläche eines Vielecks von der geraden Seitenzahl n ist daher nach No. 6:

$$\begin{aligned} F_n = & (y_1 - y_3)(x_2 - x_4) + (y_2 - y_4)(x_3 - x_1) \\ & + (y_1 - y_5)(x_4 - x_6) + (y_4 - y_6)(x_5 - x_1) \\ & + (y_1 - y_7)(x_6 - x_8) + (y_6 - y_8)(x_7 - x_1) \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & + (y_1 - y_{n-1})(x_{n-2} - x_n) + (y_{n-2} - y_n)(x_{n-1} - x_1) \end{aligned} \qquad \text{No. 7.}$$

Für unser obiges Beispiel ist $n = 6$, daher die Formel:

$$\begin{aligned} F_6 = & (y_1 - y_3)(x_2 - x_4) + (y_2 - y_4)(x_3 - x_1) \\ & + (y_1 - y_5)(x_4 - x_6) + (y_4 - y_6)(x_5 - x_1) \end{aligned}$$

Die Zahlenrechnung ist:

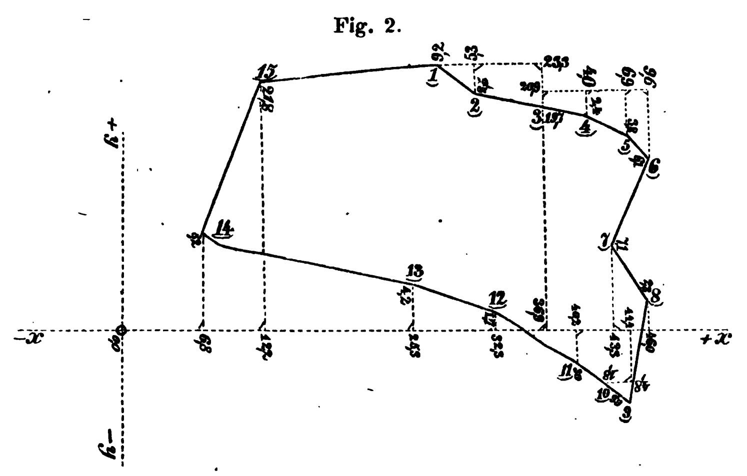
Nummer.	y	x	Unterschiede der Ordinaten	Unterschiede der Abscissen	Producte
1	+ 11,3	+ 9,2	— 15,9	— 30,0	+ 477,00
2	+ 26,5	+ 13,3	+ 14,0	+ 26,3	+ 368,20
3	+ 27,2	+ 35,5	— 6,7	+ 11,7	— 78,39
4	+ 12,5	+ 43,3	+ 5,6	+ 18,5	+ 103,60
5	+ 18,0	+ 27,7			+ 948,80
6	+ 6,9	+ 31,6			— 78,39
					+ 870,41
				F =	435,205

Diese Rechnung nimmmt den geringsten Ziffern-Aufwand in Anspruch, entbehrt dafür aber auch der im §. 4 erwähnten nützlichen Rechnungs-Kontrole und erfordert auch abgesehen davon etwas mehr Aufmerksamkeit als die Formeln No. 1, 2, 3, 4.

§. 8.

Die Vermessungs-Manuale sind nicht immer so geführt, dass die eingetragenen Maasse sich unmittelbar auf die allgemeine Coordinaten-Achse beziehen.

Fig. 2.



Waren beispielsweise die Punkte No. 1, 2, 4, 5, 6 der Figur 2 nur von der oberen Seite her zugänglich, so sah sich der Geometer genöthigt, nach dem Punkte 3 einen Hauptperpendickel zu legen, ihn zu verlängern, zu beiden Seiten Neben-Perpendickel zu nehmen und von diesen rückwärts auf die Punkte 2, 4, 6 rechtwinklig abzuschlagen. Ebenso mag er es bei dem Punkte No. 10 bequemer und zuverlässiger gefunden haben, ihn nicht von der Abscissen-Achse sondern von dem Perpendickel nach No. 9 aus zu bestimmen. Die Herstellung der Coordinaten in Zahlen erfordert also jetzt bald eine Addition bald eine Subtraction von Theilmaassen, z. B.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= + 36{,}9 - 9{,}2 = + 27{,}7 & y_1 &= + 23{,}3 \\
x_2 &= + 36{,}9 - 5{,}3 = + 31{,}6 & y_2 &= + 23{,}3 - 2{,}5 = + 20{,}8 \\
x_4 &= + 36{,}9 + 4{,}0 = + 40{,}9 & y_4 &= + 20{,}9 - 2{,}4 = + 18{,}5 \\
x_5 &= + 36{,}9 + 6{,}9 = + 43{,}8 & y_5 &= + 20{,}9 - 3{,}8 = + 17{,}1 \\
x_6 &= + 36{,}9 + 9{,}6 = + 46{,}5 & y_6 &= + 20{,}9 - 6{,}1 = + 14{,}8 \\
x_{10} &= + 44{,}4 - 1{,}8 = + 42{,}6 & y_{10} &= - \ 4{,}8
\end{aligned}
$$

Der geschickte Rechner vollzieht diese Additionen und Subtractionen ohne die zusammenzusetzenden Theile niederzuschreiben. Ebenso kontrolirt er sein Geschäft, indem er die Resultate der Zusammensetzungen mit der Figur vergleicht, z. B.:

$$x_2 - x_1 = 31{,}6 - 27{,}7 = 9{,}2 - 5{,}3 = 3{,}9 \text{ u. s. w.}$$

Wer es zur grössten Gewandheit gebracht hat, braucht auch die einzelnen Theile der Klammergrössen in den Formeln 1 und 2 nicht nieder zu schreiben, er kann die Resultate der, immer eine Abscisse oder Ordinate überspringenden Subtractionen sogleich angeben, z. B. wie hierneben: Gegen diese immerhin doch etwas zusammengesetzte Operation ist die Summen-Kontrole der Klammergrössen von besonderer Wichtigkeit.

y_k	$x_{k\,1} - x_{k-1}$
+ 23,3	+ 19,4
+ 20,8	+ 9,2
+ 19,7	+ 9,3
+ 18,5	+ 6,9
+ 17,1	+ 5,6
+ 14,8	− 0,5
+ 7,1	− 0,5
+ 2,3	+ 1,1
− 6,6	− 3,4
− 4,8	− 4,2
− 3,0	− 10,3
+ 1,7	− 14,9
+ 4,2	− 25,5
+ 8,2	− 13,1
+ 21,8	+ 20,9
	+ 72,4
	− 72,4

Die Kontrolirung der Multiplikation erfordert nicht, dass immer nach den beiden Formeln No. 1 und No. 2 gerechnet werde. Man kann sie auch dadurch beschaffen, dass bei dem Aufschlagen der Tafel einmal der erste Factor, das andermal der zweite zur Eingangszahl genommen werde.

§. 9.

In den bisherigen Betrachtungen war uns die Lage der Coordinaten-Achse gegen die Figur, deren Fläche berechnet werden sollte, gleichgültig; diese Lage kann aber auch eine bestimmte sein. Ein Punkt der Figur kann zugleich der Anfangspunkt der Abscissen oder der Ordinaten oder beides zugleich, d. h. er kann zugleich der Kardinalpunkt der Coordinaten sein. Es ist auch möglich, dass die Abscissen-Achse oder die Ordinaten-Achse durch mehr als einen Eckpunkt der Figur geht. In einem solchen Falle wird beziehungsweise die Abscisse oder die Ordinate $= 0$.

Trifft dieses Nullwerden den Bestandtheil einer Klammergrösse der Formeln No. 1 oder 2, so ist die Klammer überflüssig und der andere Bestandtheil für sich allein der von ihr eingeschlossene Werth; trifft es aber den Vorfactor einer Klammer, so wird das ganze Product Null.

Da nun der Rechner die Wahl hat, entweder nach der Formel No. 1 oder No. 2 zu rechnen, er mithin nach Belieben die Ordinate oder die Abscisse zum Vorfactor nehmen kann, so folgt, dass er in einem solchen Falle das Vieleck von n Seiten immer in höchstens $n-1$ Producten rechnen kann. Ginge aber eine der beiden Coordinaten-Achsen durch zwei benachbarte Ecken der Figur, d. h. läge die Zwischenseite in jener Achse, so ergäbe sich die Fläche durch $n-2$ Producte.

§. 10.

Der Fall, wo eine der beiden Coordinaten-Achsen durch einen Eckpunkt der zu berechnenden Figur geht, ist genau genommen schon im §. 6 abgehandelt worden, weil dort die ursprünglich gegebenen Coordinaten, durch Subtraction irgend einer Ordinate oder Abscisse von allen übrigen, auf den hier gedachten Zustand zurück geführt wurden. Wir können uns also im Fortgange auf den Fall beschränken, wo eine der Achsen durch zwei benachbarte Punkte des Vielecks geht.

Der Rechner kann den Anfang seiner Operation ganz nach Belieben wählen; also den einen jener Punkte zum Anfang, den andern zum Ende ausersehen. Sind demnach die Ordinaten beider Punkte $= 0$, so fallen aus der Formel No. 1 das erste und das letzte Product aus, sie zieht sich also zusammen auf

$$F_n = y_2 (x_3 - x_1) + y_3 (x_4 - x_2) + \ldots . y_{n-1} (x_n - x_{n-2})$$

An der Summe der Klammergrössen fehlen zum Nullwerden die Bestandtheile:

$$(x_2 - x_n) + (x_1 - x_{n-1});$$

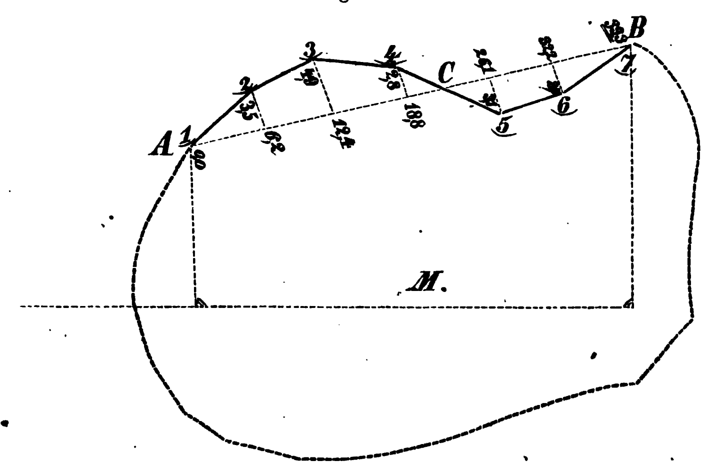
diese müssen daher gehörigen Orts in Zurechnung gebracht werden. Am über-

sichtlichsten geschieht dieses neben den ihnen entsprechenden, mit dem Zeichen 0 vertretenen Vorfactoren.

Der Fall, dass eine Seite des Vielecks zugleich die Abscissenlinie für die Coordinaten seiner Eckpunkte ist, kömmt beim Feldmessen sehr häufig und namentlich da vor, wo es zweckmässiger ist, nur die Endpunkte einer Operationslinie gegen das trigonometrische oder polygonometrische Netz oder gegen das anderweitig verbundene Constructions-System zu bestimmen, sie selbst aber so zu legen, dass sie so nahe als möglich an dem aufzunehmenden Grenzzuge entlang führt.

Wir wollen ein Beispiel dieser Art betrachten. In der Figur 3 ist die Linie *A. B.* eine Polygonseite, deren Endpunkte durch Coordinaten der Kar-

Figur 3.



dinal-Achsen bestimmt sind; sie selbst aber ist vom Geometer zur Nebenachse der Abscissen genommen, bei denen er die Punkte No. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 durch rechtwinklige Abschläge von geringer Länge bestimmen konnte. Die Aufgabe des Rechners besteht nun darin, den Flächentheil zu bestimmen, welcher wegen dieser Construction dem Areal *M* zugesetzt oder abgerechnet werden muss. Die doppelt geführte Rechnung ist:

Nummer.	y	x	$y_{k+1} - y_{n-1}$	$x_{k+1} - x_{k-1}$	$y_k(x_{k+1} - x_{k-1})$	$x_k(y_{k+1} - y_{k-1})$
1	0	0	+ 3,5	− 33,1	0	0
2	+ 3,5	+ 6,2	+ 4,9	+ 12,4	+ 43,40	+ 30,38
3	+ 4,9	+ 12,4	− 0,7	+ 12,6	+ 61,74	− 8,68
4	+ 2,8	+ 18,8	− 8,0	+ 13,7	+ 38,36	− 150,40
5	− 3,1	+ 26,1	− 5,8	+ 13,4	− 41,54	− 151,38
6	− 3,0	+ 32,2	+ 3,1	+ 13,2	− 39,60	+ 99,82
7	0	+ 39,3	+ 3,0	− 32,2	0	+ 117,90
			+ 14,5	+ 65,3	+ 143,50	+ 248,10
			− 14,5	− 65,3	− 81,14	− 310,46
			0	0	+ 62,36	− 62,36
				$F =$	+ 31,18	+ 31,18

War also die Fläche des Grundpolygons aus seinen Haupt-Coordinaten berechnet, so mussten ihr, vermöge des Grenzzuges über *A. B.*, 31, 18 zugesetzt werden.

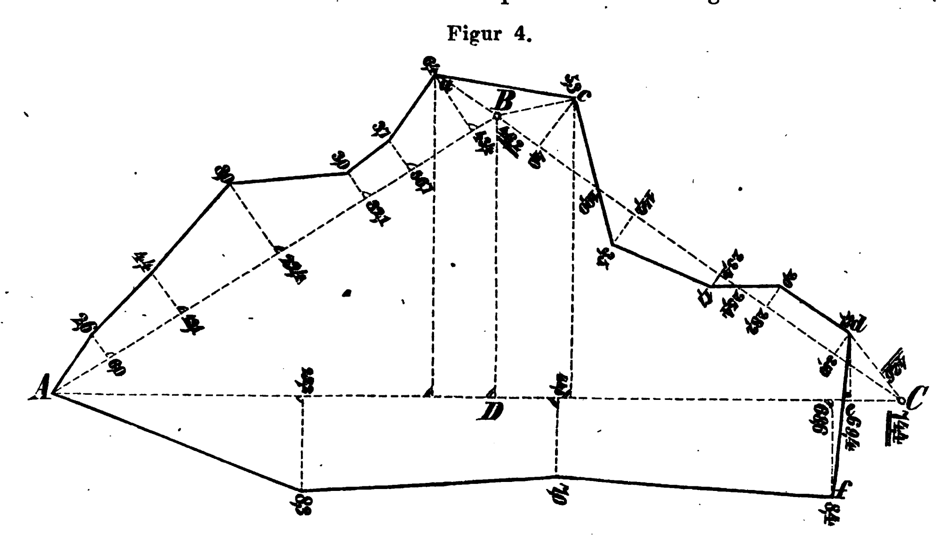
Soll die Rechnung nur einmal geführt werden, so ist die Formel No. 1 die bequemste, weil sie ein Product erspart.

Wäre die Abscisse des Durchschnittspunktes C. gemessen worden, so hätte jede der neben AC und CB liegenden Flächen besonders berechnet, demnächst die eine von der andern abgezogen werden können; übersichtlicher wäre aber die Arbeit doch geblieben, wenn ohne Aenderung im Gange der obigen Rechnung die Abscisse für c mit der Ordinate $= 0$ in die Reihe gesetzt wäre.

§. 11.

Wir betrachten noch den Fall, wo ein Grenzzug von zwei, nicht unter rechten Winkeln zusammentreffenden Operationslinien aufgenommen ist.

Figur 4.



Hätte der Feldmesser nichts geliefert als die Maasse der Figur 4, so wäre zwar das vermessene Vieleck und folglich auch seine Fläche bestimmt, aber diese keineswegs mit Bequemlichkeit zu berechnen. Zunächst könnte zwar die Grundfigur ABC vermittelst einer Logarithmentafel aus den drei Seiten nach der bekannten Formel:

$$F = \sqrt{S\,(S-AB)\,(S-AC)\,(S-BC)}$$

in welcher $S = \frac{AB + AC + BC}{2}$ gesetzt ist, berechnet werden, sodann würde die Fläche des Saumes über AB bis Ba, über BC von Bc bis dC, über AC von A bis ef nach dem Verfahren des vorigen Paragraphen gefunden werden können; aber der bis dahin erhaltenen Flächensumme müsste noch die Fläche des Uebergangs-Dreiecks aBc in Zugang und die des Dreiecks deC in Abgang gebracht werden. Für beide Dreiecke kennen wir aber die Coordinaten einer den je drei Punkten gemeinschaftlichen Abscissen-Achse nicht. Diese müssten also noch durch Rechnung oder durch eine graphische Construction gefunden werden.

Hätte der Feldarbeiter eine klare Einsicht in das Geschäft des Rechners

gehabt, so würde er gewiss nicht unterlassen haben, die für ihn sehr geringe Mühe aufzuwenden, den Punkt *B* über der Linie *AC* durch einen Perpendickel zu bestimmen, auch in der Nähe der Treffpunkte *B* und *C* den zuletzt gegen die eine Operationslinie coordinirten Punkt, mittelst eines Perdickels der andern Linie, auch auf diese zu beziehen. Dieses Geschäft hätte ihm nur wenige Minuten gekostet, während der Rechner, wenn er noch keine Karte besitzt, oder graphische Mittel überhaupt nicht benutzen soll, viel längere Zeit darauf verwenden muss. Es ist daher nicht wenig auffallend, dass die Aufsichtsbehörden einerseits immer mehr auf Originalzahlen-Rechnung dringen und auf der andern Seite doch in ihren Instructionen die eben so leicht erfüllbare als unerlässliche Vorschrift mangeln lassen, welche etwa in folgende Worte gefasst werden könnte:

„Treffen zwei Operationslinien zur Bestimmung eines Grenzzuges un-
„ter einem schiefen Winkel zusammen, so muss ein Uebergangs-Punkt
„des Grenzzuges gegen jede der beiden Linien coordinatorisch be-
„stimmt werden."

„Dieser Punkt kann einer der Uebergangs-Eckpunkte des Grenzzuges
„sein oder in der Linie zwischen den zwei Uebergangs-Eckpunkten
„liegen."

Welche Mühe der Rechner aufzuwenden hat, wenn diese Vorschrift nicht erfüllt wird, können wir ersehen, wenn wir in dem vorstehenden Beispiel diesen Mangel auf dem kürzesten Wege durch Rechnung zu ersetzen suchen. — Wollen wir keine trigonometrischen Hülfsmittel anwenden, so ist es am einfachsten, die Punkte *B*, *a*, *c*, *d* mittelst Coordinaten auf die Abscissenlinie *AC* zu beziehen. Ziehen wir durch die Fusspunkte der Nebenperpendickel nach *a*, *c*, *d* Parallelen zur Abscissenlinie *AC* und fällen wir von *a*, *B*, *c*, *d* Perpendickel auf *AC*, so schneiden sich dieselben mit den letzteren so, dass ähnliche Dreiecke entstehen.

Wir haben dann zunächst:

$$AD = \frac{(AB)^2 + (AC)^2 - (BC)^2}{2.\ (AC)};\ BD = \sqrt{(AB)^2 - (AD)^2}$$

$(AB)^2 = (46{,}2)^2 = 2134{,}44$ | $AB = 46{,}2$; $AD = 39{,}35$
$(AC)^2 = (74{,}4)^2 = 5535{,}36$ | Summa $= 85{,}55 \times$ Unterschied $6{,}85 = 586{,}02$
$7669{,}80$ | $BD =$ Quadratwurzel $= 24{,}2 = y_B$
$(BC)^2 = (42{,}6)^2 = 1814{,}76$
$5855{,}04 : 148{,}8$
$= 39{,}35 = x_B$

und nach der gedachten Aehnlichkeit der Dreiecke

$$y_a = 43{,}4 \times \frac{24{,}2}{46{,}2} + 6{,}4 \times \frac{39{,}35}{46{,}2};\ x_a = 43{,}4 \times \frac{39{,}35}{46{,}2} - 6{,}4.\ \frac{24{,}2}{46{,}2}$$

$$y_c = 24{,}2 - 4{,}0 \times \frac{24{,}2}{42{,}6} + 5{,}3\ \frac{35{,}05}{42{,}6};\ x_c = 39{,}35 + 4{,}0\ \frac{35{,}05}{42{,}6} + 5{,}3 \times \frac{24{,}2}{42{,}6}$$

$$y_d = 24{,}2 - 35{,}9 \times \frac{24{,}2}{42{,}6} + 2{,}2 \times \frac{35{,}05}{42\ 6};\ x_d = 39{,}35 + 35{,}9 \times \frac{35{,}05}{42{,}6} + 2{,}2 \times \frac{24{,}2}{42{,}6}$$

oder mit Hülfe der Multiplikationstafel ausgeführt:

$y_a = 22{,}7 + 5{,}5 = + 28{,}2;\ x_a = 36{,}9 - 3{,}3 = + 33{,}6$
$y_c = 24{,}2 - 2{,}3 + 4{,}4 = + 26{,}3;\ x_c = 39{,}35 + 3{,}3 + 3{,}0 = + 45{,}65$
$y_d = 24{,}2 - 20{,}4 + 1{,}8 = + 5{,}8;\ x_d = 39{,}35 + 29{,}5 + 1{,}25 = + 70{,}1$

Die Flächenberechnung wird nun am übersichtlichsten für die drei Abscissen-Linien in drei Acte getheilt, nämlich:

Ueber *AC.*					Ueber *AB.*				
Punkt.	y_k	x_k	$x_{k+1} - x_{k-1}$	$y_k(x_{k+1} - x_{k-1})$	Punkt.	y_k	x_k	$x_{k+1} - x_{k-1}$	$y_k(x_{k+1} - x_{k-1})$
A	0	0	+ 39,35	0	*A*	0	0	− 40,2	0
B	+ 24,2	+ 39,35	+ 33,6	+ 813,12		+ 2,6	+ 6,0	+ 13,1	+ 34,06
a	+ 28,2	+ 33,6	+ 6,3	+ 177,66		+ 4,4	+ 13,1	+ 16,4	+ 72,16
c	+ 26,3	+ 45,65	+ 5,75	+ 151,22		+ 8,0	+ 22,4	+ 19,0	+ 152,00
B	+ 24,2	+ 39,35	+ 28,75	+ 695,75		+ 3,0	+ 32,1	+ 14,3	+ 42,90
C	0	+ 74,4	+ 30,75	0		+ 3,7	+ 36,7	+ 11,3	+ 41,81
d	+ 5,8	+ 70,1	− 5,0	− 29,00	*a*	+ 6,4	+ 43,4	+ 9,5	+ 60,80
e	0	+ 69,4	− 1,5	0	*B*	0	+ 46,2	− 43,4	0
	− 8,4	+ 68,6	− 24,9	+ 209,16				+ 83,6	+ 403,73
	− 7,0	+ 44,5	− 46,4	+ 324,80				− 83,6	
								0	
	− 8,3	+ 22,2	− 44,5	+ 369,35				Ueber *BC.*	
A	0	0	− 22,2	0	*B*	0	0	− 38,6	0
			+ 144,5	+ 2741,06	*c*	+ 5,3	+ 4,0	+ 10,0	+ 53,00
			− 144,5	+ 29,00		0	+ 10,0	+ 10,2	0
			0	+ 2712,06		− 3,5	+ 14,2	+ 13,4	− 46,90
Dazu die Fläche			über *AB*	+ 403,73		− 1,7	+ 23,4	+ 11,2	− 19,04
„ „		„	„ *BC*	+ 39,74		0	+ 25,4	+ 4,8	0
				3155,53		+ 2,0	+ 28,2	+ 10,5	+ 21,00
			$F =$	1577,765	*d*	+ 2,2	+ 35,9	+ 14,4	+ 31,68
					C	0	+ 42,6	− 35,9	0
								+ 74,5	+ 105,68
								− 74,5	− 65,94
								0	+ 39,74

Die bei der ungeschickten Feldoperation erforderliche Vorbereitung machte also mehr Mühe als die ganze nachfolgende Flächenberechnung.

§. 12.

Die zu vermessenden Grundstücke sind sehr oft nicht mit geraden Linien begrenzt. In den meisten Fällen liegen insbesondere die Ackerstücke in schmalen und langen Streifen neben einander und die sie trennenden Furchen sind gebogen. Soll ein solches Grundstück oder sollen mehrere derselben zugleich aufgenommen werden, so legt der Feldmesser eine Operationslinie annähernd in der Richtung der Furchen an, errichtet auf dieser in so engen Zwischenräumen, als nöthig ist, um die innerhalb fallenden Bogentheile der Grenzfurchen als gerade Linien betrachten zu dürfen, und misst dann die Längen dieser Perpendickel bis zu den Punkten, wo sie die Grenzfurchen der Grundstücke durchschneiden.

Wäre in dieser Weise die Figur 5 vermessen worden, so läge genau genommen ein Fünfzehneck zur Berechnung vor, aber es würde offenbar überflüssig sein, nach der Formel No. 1 fünfzehn Factoren anzusetzen. Augen-

scheinlich würden wir für y_2 dieselbe Klammergrösse finden, wie für y_{15}, für y_3 dieselbe, wie für y_{14}, jedoch immer mit entgegengesetzten Zeichen. Der doppelte Flächeninhalt dieses Fünfzehnecks würde also sein:

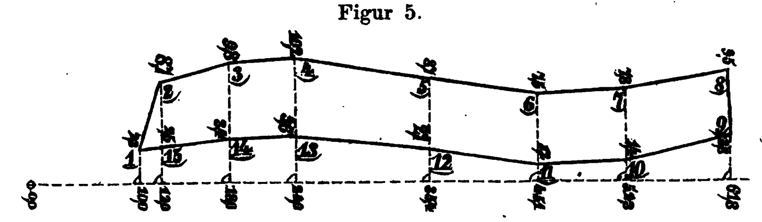
$$2\,F_{15} = y_2\,(x_3 - x_1) + y_3\,(x_4 - x_2) + y_4\,(x_5 - x_3) + \ldots y_7\,(x_8 - x_6) + y_8\,(x_9 - x_7)$$
$$+ y_{15}\,(x_1 - x_3) + y_{14}\,(x_2 - x_4) + y_{13}\,(x_3 - x_5) + \ldots y_{10}\,(x_6 - x_8) + y_9\,(x_7 - x_9)$$

und diese Formel würde sich zusammenziehen auf:

$$2\,F_{15} = (y_2 - y_{15})\,(x_3 - x_1) + (y_3 - y_{14})\,(x_4 - x_2) + \ldots (y_7 - y_{10})\,(x_8 - x_6)$$
$$+ (y_8 - y_9)\,(x_9 - x_7).$$

Die Figur 5 stellt in sofern einen Specialfall dar, als dieselbe bei den Punkten 8 und 9 rechtwinklig gegen die Abscissen-Achse abschneidet, was an

Figur 5.



dem anderen Ende der Figur nicht geschieht. Insofern jenes rechtwinklige Abschneiden zufällig ist, würde es dem allgemeineren Fall entsprechend sein, dass an jedem Ende eine dem Punkt 1 vergleichbare Ecke sich befände. Alsdann würden zwischen dem Anfangs- und dem Endpunkte der Figur die von den Ordinaten jeder Abscisse getroffenen Punkte paarweise vorkommen, das Vieleck würde also, jene beiden Endpunkte zugezählt, von gerader Seitenzahl sein. Bezeichnen wir diese mit dem Buchstaben n, so sehen wir nach dem Obigen sogleich, dass die doppelte Fläche durch folgende allgemeine Formel ausgedrückt werden kann:

$$2\,F_n = (y_2 - y_n)\,(x_3 - x_1) + (y_3 - y_{n-1})\,(x_4 - x_2) + (y_4 - y_{n-2})\,(x_5 - x_3) \quad \text{No. 8.}$$
$$+ \ldots (y_{\frac{n}{2}} - y_{\frac{n}{2}+2})\,(x_{\frac{n}{2}+1} - x_{\frac{n}{2}-1}).$$

In dieser Formel kommen y_1 und $y_{\frac{n}{2}+1}$ gar nicht vor; weil ihre Klammerfactoren bei Anwendung der allgemeinen Vielecksformel No. 1, nämlich:

$(x_2 - x_n)$ und $(x_{\frac{n}{2}+2} - x_{\frac{n}{2}})$ hier beide $= 0$ sind.

Diese aus der allgemeinen Polygonformel No. 1 abgeleitete Formel No. 8 lässt für ihren besonderen Zweck eine nützliche Umformung zu. Die Ordinaten-Unterschiede $y_2 - y_n$, $y_3 - y_{n-1}$, $y_4 - y_{n-2}$ u. s. w. sind nichts anderes als die Breiten der Figur, in der Richtung der Ordinate und bei den Abscissen x_2, x_3, x_4 u. s. w., man kann sie also auch füglich mit einem Buchstaben B bezeichnen, so nämlich, dass:

$B_1 = 0$	für die Abscisse	x_1
$B_2 = y_2 - y_n$	- - -	x_2
$B_3 = y_3 - y_{n-1}$	- - -	x_3
$B_4 = y_4 - y_{n-2}$	- - -	x_4

u. s. w.

Wir betrachten nun nicht mehr ein Polygon von n Ecken, sondern ein

Vieleck, welches zwischen den Ordinaten von m Abscissen liegt. Von diesen Ordinaten können

$m-2$ Ordinatenpaare und 2 einzelne Ordinaten
$m-1$ - - 1 - Ordinate
m - - 0 - -

sein.

Bei dem zweiten Falle kann das Ordinaten-Paar am Anfange oder am Ende liegen. Wir haben also 4 Fälle zu betrachten:

Für den ersten Fall finden wir die Flächen-Formel sofort, wenn wir die obige anderweitige Bezeichnung in die Formel No. 8 substituiren, nämlich:

No. 9. $$2 F_m = B_2 (x_3 - x_1) + B_3 (x_4 - x_2) + B_4 (x_5 - x_3) + \ldots B_{m-1} (x_m - x_{m-2}) + B_m (x_{m+1} - x_{m-1})$$

und wenn wir die Klammergrössen für sich summiren, die Kontrole:

$$S_m = -x_1 - x_2 + x_m + x_{m+1}$$

Liegt aber das erste Ordinatenpaar über der ersten Abscisse, so sinkt von 2 an die Kernziffer überall um 1 und wir haben*):

No. 10. $$2 F_{m'} = B_1 (x_2 - x_1) + B_2 (x_3 - x_1) + B_3 (x_4 - x_2) + \ldots B_{m'-1} (x_{m'} - x_{m'-2}) + B_{m'} (x_{m'+1} - x_{m'-1})$$

$$S_{m'} = -2 x_1 + x_{m'} + x_{m'+1}$$

Liegt aber nicht über der ersten, sondern über der letzten Abscisse ein Ordinatenpaar, so haben wir:

No. 11. $$2 F_{m''} = B_2 (x_3 - x_1) + B_3 (x_4 - x_2) + B_4 (x_5 - x_3) + \ldots B_{m''-1} (x_{m''} - x_{m''-2}) + B_{m''} (x_{m''} - x_{m''-1})$$

und

$$S_{m''} = -x_1 - x_2 + 2 x_{m''}$$

Liegen endlich über der ersten und der letzten Abscisse Ordinatenpaare, so ist:

No. 12. $$2 F_{m'''} = B_1 (x_2 - x_1) + B_2 (x_3 - x_1) + B_3 (x_4 - x_2) + \ldots B_{m'''-1} (x_{m'''} - x_{m'''-2}) + B_{m'''-1} (x_{m'''} - x_{m'''-1})$$

und

$$S_{m'''} = -2 x_1 + 2 x_{m'''}$$

Aehnlich wie zur Formel No. 1 die Gegenformel No. 2 gefunden wurde, lässt sich nun auch zur Formel No. 9 eine Gegenformel entwickeln. Führen wir nämlich in ihr die blos angezeigte Multiplication aus und setzen x statt B vor die Klammern, so finden wir sofort:

No. 13. $$-2 F_m = x_1 B_2 + x_2 B_3 + x_3 (B_4 - B_2) + x_4 (B_5 - B_3) + \ldots x_{m-2} (B_{m-1} - B_{m-3}) + x_{m-1} (B_m - B_{m-2}) - x_m B_{m-1} - x_{m+1} B_m$$

und die Summe der B:

$$S'_m = 0$$

Ferner aus No. 10:

No. 14. $$-2 F_{m'} = x_1 (B_2 + B_1) + x_2 (B_3 - B_1) + x_3 (B_4 - B_2) + \ldots x_{m'-2} (B_{m'-1} - B_{m'-3}) + x_{m'-1} (B_{m'} - B_{m'-2}) - x_{m'} B_{m'-1} - x_{m'+1} B_{m'}$$

$$S'_{m'} = 0$$

*) Man sieht leicht, dass die End-Glieder in No. 10 eine Abänderung in der Form nicht erleiden dürfen, weil durch das Zusammenfallen von x_1 und x_2 die Zahl m um 1 ohnehin abnimmt, also $m' = m - 1$.

aus No. 11:

$$-2F_{m''}=x_1 B_2+x_2 B_3+x_3(B_4-B_2)+x_4(B_5-B_3)+\ldots x_{m''-2}(B_{m''-1}-B_{m''-3}) \quad \text{No. 15.}$$
$$+x_{m''-1}(B_{m''}-B_{m''-2})-x_{m''}(B_{m''-1}+B_{m''})$$
$$S'_{m''}=0$$

aus No. 12:

$$-2F_{m'''}=x_1(B_2+B_1)+x_2(B_3-B_1)+x_3(B_4-B_2)+\ldots x_{m'''-2} \quad \text{No. 16.}$$
$$(B_{m'''-1}-B_{m'''-3})+x_{m'''-1}(B_{m'''}-B_{m'''-2})-x_{m'''}(B_{m'''-1}+B_{m'''})$$
$$S'_{m'''}=0.$$

In Worten ausgedrückt lauten die Formeln: No. 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16:

„Um den doppelten Flächen-Inhalt einer durch parallele Ordinaten an „beiden Seiten geschnittenen Figur zu berechnen, multiplicire man:

entweder

„I. jede Breite mit dem Unterschiede zwischen der ihr nachfolgenden „und der ihr vorhergehenden, beziehungsweise der ihr nachfolgenden „und ihrer eignen oder ihrer eignen und der ihr vorhergehenden Ab- „scisse, wenn die Figur am Anfange oder Ende senkrecht abschneidet,

oder

„II. jede Abscisse mit dem Unterschiede zwischen der ihr nachfolgenden „und der ihr vorhergehenden Breite, beziehungsweise mit der Summe „ihrer eignen und ihrer nachfolgenden oder der negativen Summe ihrer „eignen und der ihr vorhergehenden Breite, wenn die eigne Breite am „Anfange oder am Ende der Figur liegt,

und

„addire die Producte algebraisch, ändere endlich das Zeichen des Re- „sultats No. II."

Die I. Berechnungsform lässt sich auch leicht in der Figur 5 anschaulich machen.

Ziehen wir von 2 nach 14
3 - 13
4 - 12
u. s. w.

Diagonalen, so bilden sich Vierecke, von denen jedes aus zwei, auf einerlei Grundlinie ruhenden Dreiecken besteht. Diese Grundlinien sind die Unterschiede der Ordinatenpaare oder die Breiten der Figur, die summarischen Höhen derselben sind die Unterschiede zwischen der nachfolgenden und vorhergehenden Abscisse.

In den Fällen, wo die Figur am Anfange oder am Ende mit dem ersten oder letzten Ordinatenpaar abschneidet, entsteht durch die Diagonale, z. B. durch die von 7 nach 9, nur ein Dreieck, dessen Höhe der Unterschied der zwei nächsten Abscissen ist, und dieser Fall fällt in dem wörtlichen Ausdrucke der Rechnungsform I dem beziehungsweisen Satze anheim.

Die Figur No. 5 gehört einem solchen Falle an und die Berechnung ihrer Fläche gestaltet sich wie folgt:

I. Rechnung.			II. Rechnung.		
B_k	$x_{k+1} - x_{k-1}$	Product.	x_k	$B_{k+1} - B_{k-1}$	Product.
0,0			10,0	+ 6,2	+ 62,00
6,2	+ 8,0	+ 49,60	12,0	+ 6,4	+ 76,80
6,4	+ 12,0	+ 76,80	18,0	+ 0,4	+ 7,20
6,6	+ 17,4	+ 114,84	24,0	— 0,4	— 9,60
6,0	+ 21,1	+ 126,60	35,4	— 0,3	— 10,62
6,3	+ 16,9	+ 106,47	45,1	+ 0,4	+ 18,04
6,4	+ 16,7	+ 106,88	52,3	— 0,6	— 31,38
5,7	+ 9,5	+ 54,15	61,8	— 12,1	— 747,78
	+ 101,6	635,34			+ 164,04
2 × 61,8	123,6			+ 13,4	— 799,38
$x_1 + x_2 =$	— 22,0			— 13,4	— 635,34
	+ 101,6	317,67			317,67

Ein einigermassen geübter Rechner liest, wie hier vorausgesetzt ist, die Breiten unmittelbar aus dem Manual.

Anmerkung. Das Verfahren des §. 12 führt auch zu einer der besten graphischen Berechnungs-Methoden. Man überzieht nämlich auf der Karte die zu berechnende Figur durch alle Ecken und Krümmungspunkte mit Parallelen. Sodann misst man entweder mit dem Zirkel und Maasstab, oder zur Schonung der Zeichnung mit einem Glas-Transversalmaassstab der Reihe nach die Längen der Parallelen, welche hier die obigen paarweisen Ordinaten-Unterschiede vertreten und sodann die Abstände der sie zwischen sich nehmenden Parallelen von einander, welche den obigen überspringenden Abscissen-Unterschieden gleichkommen und multiplicirt die zusammen gehörigen Maasse beider Gattungen mit einander. Die Summe der Producte giebt den doppelten Flächen-Inhalt. Doch muss auf die den Formeln No. 10, 11, 12 analogen Fälle Bedacht genommen werden, wenn die Parallelen mit einer Seite des Vielecks parallel gezogen werden. Wie bei diesem Verfahren auch die Summenkontrole der Klammergrössen anwendbar ist, wird jeder Rechner nach dem obigen leicht entnehmen können, wobei es sich jedoch von selbst versteht, dass die Summe der auf einmal abgegriffenen Maasse $x_{\frac{n}{2}+1} - x_1$ und $x_{\frac{n}{2}} - x_2$ mit den Summen aller überspringlichen Abscissen-Unterschiede wegen der unvermeidlichen Fehler graphischer Operationen hier nicht absolut genau übereinstimmen kann.

II. Abschnitt.

Berechnung der Flächen mit überwiegender Benutzung der Original-Maasse.

§. 13.

Bald darauf, nachdem der Theodolith bei der Ausübung der Feldmesskunst sich Bahn gebrochen hatte, als nicht nur die kleineren Dreiecke zur Aufnahme der Gemeinde-Feldmarken, sondern auch die Winkel der die einzelnen Fluren derselben umgürtenden Polygone mit ihm gemessen und die Standpunkte dieser Netze auf gemeinschaftliche Coordinatenachsen bezogen wurden; als man sich dadurch in den Stand gesetzt hatte, auch die Flächeninhalte der die

Feldmarken und die Fluren einschliessenden Netz-Polygone auf die obige, leichte Weise aus den Zahlengrössen der Coordinaten zu berechnen, da erwuchs das lebhafte Verlangen, auch die Flächeninhalte aller einzelnen Grundstücke aus Original-Coordinaten berechnen zu können. Man machte in der That ernstliche Versuche, die Methode der Spezial-Vermessung diesem Zwecke anzupassen; man legte durch die Flur eine Coordinaten-Achse und ging mit den Spezial-Operationslinien nur unter rechten Winkeln von ihr und weiterhin von den so gelegten Nebenperpendickeln aus und nannte diese Methode Perpendickular-Methode.

Die Erfahrung lehrte bei diesen Versuchen, dass der Genauigkeitstrieb der Feldmesser sich überstürzt hatte. Die Beschränkung, dass mit allen Operationslinien nur unter rechten Winkeln abgegangen werden durfte, erschwerte die Arbeit im waldigen und hügeligen Terrain, zwischen Hecken, Gräben, Flüssen, in den Strassen und Gärten der Wohnplätze in so hohem Grade, dass an eine strenge und allgemeine Durchführung des Grundsatzes sehr bald nicht mehr gedacht wurde. Zu diesen äusseren Schwierigkeiten gesellte sich nun auch die Wahrnehmung, dass durch das treppenförmige Aufbauen der vielen Perpendickel auf einander der eigentliche Zweck des Verfahrens — die grössere Genauigkeit der Endresultate — ganz verloren ging, ja in ihr Gegentheil umschlug. Die versuchenden Geometer kamen zu der Ueberzeugung, dass nur Zweckmässigkeit und Bequemlichkeit für die Lage einer Operationslinie entscheiden dürfe, und damit gelangte die Polygonal-Constructionsmethode zur Alleinherrschaft. Sie ist überall anwendbar, in der wüsten Heidegegend, wie in den Strassen der Stadt, in offenen Feld- und Wiesen-Fluren, wie im zerklüfteten Gebirge und, geschickt gehandhabt, überall die leichteste.

Das Verfahren bei der Polygonal-Constructions-Methode, welches hier schon des besseren Verständnisses wegen kurz angegeben werden muss, ist im Wesentlichen folgendes:

Handelt es sich um die Aufnahme eines ausgedehnten Areals, so muss dasselbe zuvörderst mit einem trigonometrischen Netze überzogen werden, an welches demnächst die weitere Grundlage des Vermessungs-Liniennetzes gehörig angeschlossen wird. Dieses Liniennetz besteht für Flurabtheilungen von etwa $^1/_{40}$ der Quadratmeile zunächst aus einem Polygon, dessen Winkel und Seiten, beziehungsweise unter Beachtung jenes Anschlusses, mit dem Theodolithen und der Messkette oder Messlatte gemessen, dessen Brechpunkte auf eine gemeinschaftliche Coordinaten-Achse durch Rechnung bezogen werden. In einem solchen Polygon wird sodann nach Zweckmässigkeit und Bequemlichkeit eine Hauptlinie ausgesteckt und an beiden Enden in den Perimeter des Polygons durch Messung der Abstände der letzteren von den nächsten Polygonpunkten festgelegt. Von der Hauptlinie aus werden Seitenlinien nach anderen Gegenden des Polygonperimeters ausgesteckt, zwischen den Seitenlinien weiterhin Nebenlinien, bis das Netz der Operationslinien soweit abwärts verzweigt ist, dass von den Haupt-Seiten und Nebenlinien, so wie von den Polygonseiten aus, alle Grenzpunkte und Grenzlinienzüge entweder mit Durch-

schnitten*) oder mit Perpendickeln von mässiger Länge mit Hülfe des Winkelkreuzes oder der Kreuzscheibe bestimmt werden können. Es ist unwichtig, unter welchen Winkeln die Operationslinien aufeinander treffen, aber es ist wichtig, dass die Nebenlinien so nahe als möglich an den Gewonnengrenzen und anderen Hauptgrenzzügen entlang und in streifenweise nebeneinanderliegenden Grundstücken so angelegt werden, dass sie die Grenzen derselben möglichst rechtwinklig durchschneiden.

Ist das System der Operationslinien ausgesteckt, so werden diese von der Hauptlinie an, deren auch nach Bedürfniss mehr als eine durchgelegt werden können, bis zu den letzten Nebenlinien hinunter gemessen, in derjenigen Reihenfolge, bei welcher immer die gerade zu messende Linie bereits durch die vorangegangene Messung an ihren beiden Endpunkten festgelegt war, der Feldmesser also immer das beste Hülfsmittel in der Hand hat, nicht nur ein deutliches, sondern auch ein der örtlichen Figur ähnliches Manual zu führen.

Gestattet die Beschaffenheit des zu vermessenden Bezirks die geradlinigte Durchlegung von Haupt- und Seitenlinien nicht, wie z. B. in den Städten mit krummlinigten Strassen oder in schwer durchdringlichen Waldungen, so muss mit Binnen-Polygonzügen nachgeholfen werden. Dergleichen Züge erfordern dann eine Ausdehnung der Winkelmessung, aber diese ist, wenn sie mit kleinen etwa 4—5zölligen Theodolithen geschieht, beiläufig bemerkt, nicht beschwerlicher als die Aufnahme solcher Binnenzüge mit der Bousole; schon aus dem einfachen Grunde nicht, weil die Behandlung und Abwartung der Magnetnadel mehr Zeit erfordert, als das Einstellen der Dosenlibelle des Theodolithen.

Ist das Polygonnetz mit seinen Coordinaten auf die Karte getragen, so werden zunächst alle in den Perimeter des Polygons eingebundenen Linienabgänge abgesetzt, sodann wird von der Hauptlinie an die Eintragung des Constructions-Netzes in derselben Reihenfolge ausgeführt, in der es gemessen wurde, wobei dann ebenfalls die Endpunkte jeder Operationslinie festliegen, ehe sie ausgezogen wird, was erst nach erfolgter Prüfung durch Vergleichung der Karte mit dem Manual geschehen darf.

Nach vollendeter Eintragung des Liniennetzes in das Polygonnetz der Karte erfolgt dann die Kartirung aller Grenzpunkte und Grenzzüge.

§. 14.

Sehen wir nun nach, welches Material das im §. 13 beschriebene Verfahren für die Berechnung der Flächen geliefert hat, so finden wir zunächst, dass für das Umfangs-Polygon, wie für die etwaigen Binnenzüge die Coordinaten-Rechnung die Elemente der Flächenberechnung so vollständig enthält, dass, wenn man wollte, dem Formular der ersteren nur zwei Rubriken, nämlich die eine für $x_{k+1} - x_{k-1}$, die andere für die Producte $y_k\,(x_{k+1} - x_{k-1})$ anzuhängen brauchte, um sogleich auf die Herstellung der Coordinaten die Ermittelung der Flächen nach der Formel No. 1 folgen lassen zu können.

*) Abscissen, deren Ordinaten = 0 sind.

Dem Inhalte des trigonometrisch bestimmten Polygons würde dann nur noch der Flächensaum algebraisch zutreten müssen, welcher durch nach Aussen oder Innen des Polygons gerichtete Perpendickel auf die Polygonseiten bezogen worden ist.

Nun kann aber bei dem jetzt noch bestehenden, im §. 11 gerügten, mangelhaften Verfahren der Feldmesser der Fall eintreten, dass zwischen zwei nächstan Polygonseiten, neben dem gemeinschaftlichen Polygonpunkt, ein Raum liegt, der nicht sogleich aus Original-Maassen berechnet werden kann. Sicherlich ist aber dieser Raum im Vergleiche zur Gesammtfläche des Polygons sehr klein; er kann also, ohne die Genauigkeit des Endresultats merklich zu gefährden, von der Karte gegriffen werden.

Wären z. B. *AB* und *BC* in der Figur 4 Polygonseiten, so könnten für die Dreiecke *aBc* und *dCe* Grundlinien und Höhen von der Karte abgemessen werden und es müsste die damit berechnete Fläche des ersten Dreiecks in Zugang die des letzten in Abgang gestellt werden.

§. 15.

Für die Vermessung ausgedehnter Heiden, Huden und Forsten ist möglieherweise das Flächenberechnungsgeschäft mit den Operationen des §. 14 schon beendigt. Ist aber der Raum innerhalb eines Umfangs- oder Binnen-Polygons in Einzelstücke getheilt und wird die Fläche jedes derselben verlangt, so müssen die Abscissen und Ordinaten der Haupt-, Seiten- und Nebenlinien in Benutzung genommen werden. Diese Benutzung ist nach dem Character der Parcellirung verschieden, je nach dem nämlich die Perpendikular- oder die Schnittbestimmung der Grenzen die überwiegende ist. Liegen nämlich die Parcellen in unregelmässigen Massen aneinander, sind sie mit gebogenen oder vieleckigen Hecken, Gräben, Wällen, Bächen u. dergl. m. begrenzt, so muss der Feldmesser vorzugsweise mit dem Perpendickel arbeiten, liegen sie aber gewannenförmig, streifenweise neben einander, so ist der Querschnitt das Hauptbestimmungsmittel. Wir betrachten beide Bestimmungsformen nach einander; zunächst:

a) Die überwiegende Perpendickularbestimmung.

§. 16.

Die vorzugsweise perpendickularischen Bestimmungen unterscheiden sich nach der Anzahl der Operationslinien, auf denen die Perpendickel ruhen. Wäre ein Grundstück nur auf eine einzige Messungslinie bezogen, so fiele sie ganz dem ersten Abschnitt dieser Schrift anheim, die Fläche könnte nach einer der obigen Formeln lediglich aus Original-Maassen berechnet werden.

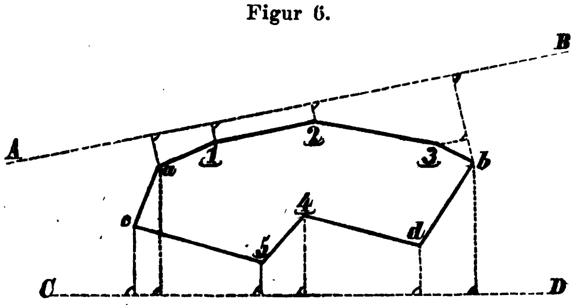
Ist dagegen ein Grundstück von zwei Linien und nur nothdürftig festgelegt, so sind mindestens zwei seiner Vielecksseiten nur so bestimmt, dass der eine Endpunkt gegen die eine, der andere gegen die zweite Messungslinie coordinirt ist.

In den meisten Fällen würde es dem Feldarbeiter bei geringer Mehrarbeit möglich sein, für die nur einseitige Bestimmung der Endpunkte jener

beiden Vielecksseiten eine doppelseitige zu geben. Dann würde das eine Vieleck in zwei ganz aus Original-Maassen berechenbare Vielecke zerfallen. Haben aber örtliche Hindernisse jene Mehrbestimmung nicht gestattet, oder hat der Feldmesser sie aus einem anderen oder auch aus keinem Grunde unterlassen, so wird der Rechner im Allgemeinen am leichtesten und sichersten zum Ziele kommen, wenn er zunächst den Mangel des Vermessungs-Manuals durch Abgreifen der fehlenden Coordinaten für zwei jener Endpunkte von der Karte ersetzt und dann die Figur nach der Formel No. 1 in zwei Vielecken berechnet, wobei er für jedes die ihm nöthig scheinenden Rechnungs-Kontrolen anwenden kann.

Wäre z. B. in der Figur 6 die Doppelbestimmung der Punkte *a* und *b* oder *c* und *d* vom Feldarbeiter unterlassen:

Figur 6.



so würde der Rechner auf die kürzeste Weise den Mangel ersetzen, wenn er für zwei dieser Punkte, etwa für *a* und *b*, welche vom Feldarbeiter nur gegen die Operationslinie *AB* coordinirt sind, die in der Figur stärker punktirten Perpendickel auf die Linie *CD* und die dazu gehörigen Abscissen auf der Karte vermittelst des verjüngten Maasstabes abgriffe, dabei die desfallsigen Maasse, wenn die Aufsichtsbehörde dies gestattete, etwa mit rother Tusche in das Manual schriebe. Er hätte dann nur zwei Vielecke, nämlich:

a. 1. 2. 3. *b*. *a*.

und *a*.*b*.*d*. 4. 5. *c*. *a*

nach der Formel No. 1 zu berechnen.

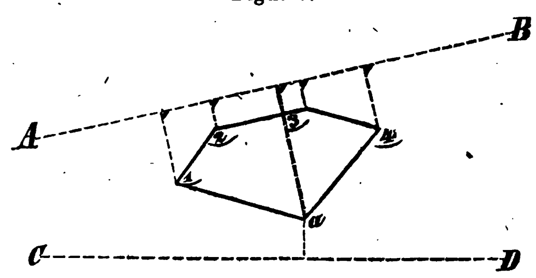
Jedes so behandelte Vieleck von *n* Seiten erfordert also zur Flächenberechnung $n + 2$ Producte.

Die zwei Vielecksseiten, deren Endpunkte auf verschiedene Messungslinien coordinirt sind, können auch einen Endpunkt gemeinschaftlich haben. Dann ist es am bequemsten, dass der Rechner die Doppelbestimmung nur für diesen einen Punkt durch Abgreifen herstellt, er kann hiernach die Fläche des Vielecks von *n* Seiten in *n* Producten finden, weil durch jenes Abgreifen die Figur auf eine einzige Abscissenlinie zurück geführt ist.

Ist z. B. in der Figur 7 der Punkt *a* auf die Linie *C D*, sind dagegen die übrigen Punkte auf die Linie *AB* bezogen, so braucht nur der in der Figur durch stärkere Punktirung kenntlich gemachte Perpendickel für den Punkt *a* und seine Abscisse von der Karte gegriffen zu werden, um die Fläche sofort nach der Formel No. 1 berechnen zu können.



Figur 7.



Es kann eintreten, dass eine sehr unregelmässige Figur mehr als einmal zwischen zwei Messungslinien alternirt. Alsdann müssen eben so oft die vorgedachten Ergänzungen nach der Karte eintreten und die Anzahl der Producte wächst beziehungsweise eben so oft mal um 2.

§. 17.

Wenn eine Figur gegen mehr als zwei Abscissenlinien coordinirt ist, so werden diese Linien in den meisten Fällen in der Nachbarschaft des betreffenden Grundstücks zusammentreffen; die Fälle, wo dieses nicht geschieht, können als Ausnahmen besonders behandelt werden.

Nehmen wir zunächst an, dass die drei Abscissenlinien ein Dreieck bilden, so liegt uns der Fall des §. 11 vor. Gesetzt nun der Rechner könne sich auf die dortige weitläufige Vorbereitungs-Rechnung nicht einlassen, auch sei die Flächenberechnung der Grundfigur aus den drei Seiten noch zu mühsam für ihn, so kann er, eine genaue Kartirung vorausgesetzt, die Fläche des Dreiecks *ABC* auf drei verschiedenen Wegen finden, indem er das Originalmaass der Linie

AB mit dem von der Karte gegriffenen aus *C* auf sie fallenden Perpendickel
AC - - - - - - - - *B* - - - - -
BC - - - - - - - - *A* - - - - -

multiplicirt. Diesen drei Producten kann jedoch nur dann eine gleiche Genauigkeit beigemessen werden, wenn das Dreieck *ABC* gleichseitig ist; bei ungleichseitigen Dreiecken findet eine ungleiche Zuverlässigkeit jener Producte statt. Sofern nämlich das Abgreifen eines Maasses von der Karte nur ein einfacher Act ist, hat die Länge der Linie keinen Einfluss auf den zu befürchtenden Fehler. Eine Linie von 50 Ruthen kann ebenso genau abgegriffen werden, als eine von 5 Ruthen. Nehmen wir an, dass die aus dem Fehler der Kartirung, aus der Unbestimmtheit des materiellen Punktes und aus dem Fehler des Abgreifens eines Maasses von der Karte zusammengenommen erwachsende Unsicherheit dieses Maasses für den Kartenmaassstab von 1 zu 2500 auf einen Fuss im Mittel anzuschlagen sei, und setzen wir beispielsweise, dass das Flächenproduct aus den beiden Factoren 5 Ruthen und 20 Ruthen erwachsen sei, also

$$5 \times 20 = 100.$$

Wäre nun der kleinere Factor (5) die abgegriffene Zahl, der grössere (20) das Originalmaass, so betrüge der zu befürchtende Flächenfehler $(5 \pm 0{,}1) \times 20 - 5 \times 20 = \pm 2$ nämlich 2 Procent.

Wäre aber umgekehrt der kleinere Factor (5) das Originalmaass, der grössere (20) die abgegriffene Zahl, so hätten wir: $5 \times (20 \pm 0{,}1) - 5 \times 20 = \pm 0{,}5$ nämlich $^1/_2$ Procent.

Je kleiner also das Originalmaass im Verhältniss zum abgegriffenen Factor ist, desto grösser ist die Genauigkeit des Products.

Nun verhalten sich aber in einem Dreieck die Seiten umgekehrt wie die auf sie fallenden Perpendickel; auf der kleineren Seite steht also der grössere Perpendickel. Wir erhalten also die grösste relative Genauigkeit, wenn wir die im Felde gemessene Länge BC mit dem auf sie oder ihre Verlängerung gefällten und von der Karte gegriffenen Perpendickel des Punktes A multipliciren, die nächst geringere durch Multiplication der Seite AB mit ihrem Perpendickel, die geringste durch $AC \times BD$.

Um uns gegen Irrthümer zu schützen, berechnen wir jede Fläche doppelt. Nach dem Vorstehenden wählen wir unter den drei möglichen Producten die beiden aus, welche die grösste Genauigkeit erwarten lassen. Sind bei diesen je zwei gleichnamige Factoren wenig von einander verschieden, so erlauben wir es uns, aus beiden Producten das einfache Mittel zu nehmen, vorausgesetzt, dass der Fehler nicht so gross ist, um einen Irrthum vermuthen und die Berechnung zur Beseitigung desselben wiederholen zu müssen.

Wäre jedoch einer der beiden gleichnamigen Factoren bedeutend grösser, als der andere, so dürfte das einfache Mittel nicht genommen, es müsste die Differenz zwischen beiden Producten nach Maassgabe ihrer relativen Genauigkeiten vertheilt werden. Gesetzt es sei in einem Dreieck:

die Seite $a = 70$ Ruthen, der auf sie fallende Perpendickel $= y_a$
- - $b = 68$ - - - - - - $= y_b$
- - $c = 4$ - - - - - - $= y_c$

so würden $68 \times y_b$ und $4 \times y_c$ die beiden genauesten Producte, und die beiden zu befürchtenden Fehler würden sein:

$$68 \times (y_b \pm 0{,}1) - 68\, y_b = \pm 6{,}8$$
$$4 \times (y_c \pm 0{,}1) - 4\, y_c = \pm 0{,}4$$

Fänden wir nun wirklich bei Vergleichung der beiden Producte $68.\, y_b$ und $4.\, y_c$ den Unterschied $= \triangle$, so müsste dem ersteren Product der Antheil $\frac{6{,}8}{6{,}8 + 0{,}4} \times \triangle$, dem anderen der Antheil $\frac{0{,}4}{6{,}8 + 0{,}4} \times \triangle$ daran beigelegt werden; das Endresultat würde also sein:

$$68.\, y_b \pm \frac{68}{72} \cdot \triangle \text{ oder } 4\, y_c \mp \frac{4}{72} \cdot \triangle$$

auch:

$$68.\, y_b \pm \frac{17}{18} \triangle \text{ oder } 4\, y_c \mp \frac{1}{18} \cdot \triangle$$

Nennen wir zur leichteren Bezeichnung die zwischen den Messungslinien liegende Fläche die Kernfläche, so bleibt im vorliegenden Falle noch die Schalfläche, nämlich das Areal zwischen den Perpendickeln der Messungslinie zu bestimmen. Diese besteht, wie wir oben (§. 11) gesehen haben, aus den ganz aus Originalmaassen zu berechnenden Flächen zwischen den Perpendickeln und den beiden Endpunkten jeder Messunglinie nebst den Uebergangsdreiecken zwischen dem Treffpunkte zweier Messungslinien, den wir

Kernpunkt nennen wollen, und den Endpunkten der beiden nächsten Perpendickel der einen und der anderen Linie. Diese Dreiecke sind, wie im Falle des §. 14, so auch hier im Verhältnisse zur Gesammtfigur sehr klein, sie können daher wie z. B. die Dreiecke *aBc*, *dCe* der Figur 4 mit Grundlinie und Höhe ganz von der Karte gegriffen werden. Es kommen ihrer so viele vor, als Kernpunkte vorhanden sind, im vorliegenden Falle also 3, wenn keiner derselben in der Grenze des zu bestimmenden Grundstücks liegt. Jedes dieser Uebergangs-Dreiecke erfordert ein Product, ausserdem der übrige Theil der Schale so viele Producte, als sie Ecken hat, endlich die Kernfläche ein Product. Hat daher die Schale *n* Ecken, und liegt in ihr kein Kernpunkt, fällt auch keine ihrer Ecken in eine Operationslinie, so ist die Anzahl der zu bildenden Producte $= n + 4$.

Für jeden Eckpunkt, welcher entweder in einer Ecke des Kerns oder auf einer Seite desselben liegt, vermindert sich die Anzahl der Producte um 1.

Will man die Uebergangs-Dreiecke nicht besonders abgreifen, so kann man den auf einer Messungslinie zuletzt coordinirten Punkt durch Abgreifen der auf die nächste Linie sich beziehenden Abscisse und Ordinate auch auf diese coordiniren und dann die Schale ganz nach der Formel No. 1 berechnen. Die Anzahl der Producte ändert sich dabei nicht und die Arbeit ist gleichförmiger und übersichtlicher.

§. 18.

Wenn die Kernfigur ein Viereck ist, so kann die Fläche derselben aus je zwei Seiten und dem zugehörigen Perpendickel berechnet werden. Vier Seiten lassen aber 6 Verbindungen zu zweien zu. Aus diesen 6 Verbindungen können wir zwei auswählen, welche nach den Betrachtungen des §. 17 die grösste Genauigkeit darbieten. Diese Producte sind überdem für den Fall, dass die beiden Seiten einander gegenüber liegen, paarweise vorhanden, weil es willkührlich ist, ob die ihnen gemeinschaftliche Diagonale nach der einen oder der anderen Seite gezogen wird. In diesem Falle kann also auch die zweite Rechnung mit den kürzesten Originalmaassen geführt werden.

Wenn aber die beiden kürzesten Seiten aneinander liegen, so überwiegt die Genauigkeit des ihnen entsprechenden Productenpaars die des ihnen bei absoluter Genauigkeit der Elemente flächengleichen anderen Productenpaars.

Gesetzt, *a* und *b* seien die kürzesten und aneinander liegenden, in Originalmaassen gegebenen Seiten eines Vierecks, ebenso *A* und *B* die beiden längsten Seiten desselben. Seien ferner y_a, y_b, y_A, y_B die den Seiten zugehörigen Perpendickel, so haben wir zunächst für die Flächen *F* und *F'* die Ausdrücke:

$$2\,F_4 = a\,.\,y_a + b\,.\,y_b;\; 2\,F'_4 = A\,y_A + B\,y_B.$$

Die Fehler, welche beiden Operationen durchschnittlich entsprechen, wollen wir mit δ und $\triangle$ bezeichnen, sie sind nach der Voraussetzung des §. 17:

$$\delta = a\,(y_a \pm 0{,}1) + b\,(y_b \pm 0{,}1) - ay_a - by_b = \pm\, 0{,}1\,(a + b)$$
$$\triangle = A\,(y_A \pm 0{,}1) + B\,(y_B \pm 0{,}1) - Ay_B - By_B = \pm\, 0{,}1\,(A + B)$$

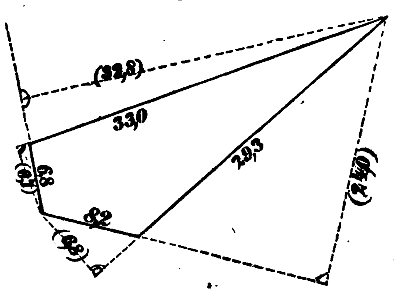
Durch Vergleichung der beiden berechneten Flächen erhalten wir die Summe der beiden wirklich begangenen Fehler, also: $F_4 - F'_4$, welche wir kürzer mit φ

bezeichnen wollen, und wir vertheilen sie im Verhältniss der beiden durchschnittlichen Fehler, setzen also:

$$2\,F_4 \pm \frac{a+b}{a+b+A+B} \times \varphi = 2\,F'_4 \mp \frac{A+B}{a+b+A+B} \times \varphi.$$

Hätten wir z. B. die Figur 8 als Kernfläche zu berechnen und wären die in Parenthesen eingeschlossenen Perpendickelmaasse von der Karte gegriffen worden, so würden wir erhalten:

Figur 8.



I. Rechnung.		II. Rechnung.				
8,2 × 24,0 =	196,80	29,3 × 6,8 =	199,24			
6,8 × 32,8 =	223,04	33,0 × 6,7 =	221,10	p	φ	$\frac{\varphi}{p}$
15,0	419,84	62,3	420,34	77,3	0,50	0,00647
$(a+b)\,\frac{\varphi}{p} =$	$+0,10$	$(A+B)\,\frac{\varphi}{p} =$	$-0,40$			
	419,94		419,94			
$F =$	209,97		209,97			

Der Perimeter des Vierecks $a+b+A+B$ ist hier mit dem Buchstaben p bezeichnet.

§. 19.

Da das Viereck als Kernfigur am häufigsten vorkömmt, so wollen wir noch ein Beispiel, wo die kürzesten Seitenmaasse einander gegenüberstehen, vollständig durchrechnen.

In der Figur 9 sind die von der Karte abgegriffenen Maasse zur besseren Unterscheidung in Parenthesen eingeschlossen.

Figur 9.

Die Rechnung ist:

Figur-Theile.	I. Rechnung.			II. Rechnung.			Fehler φ
	y_k	$x_{k+1}-x_{k-1}$	Product	x_k	$y_{k+1}-y_{k-1}$	Product	
Kern	(24,7)	12,2	301,34	12,2	(34,9)	425,78	
	(32,5)	18,1	588,25	18,1	(25,7)	465,17	
			+ 889,59			— 890,95	1,36
			+ 0,68			+ 0,68	
Schale *A*	0,0	— 15,0	0	+ 13,8	— 4,0	— 55,20	
	— (4,0)	+ 4,7	— 18,80	+(11,0)	— 2,2	— 24,20	
	— 2,2	+ 12,6	— 27,72	+ 18,5	+ 2,2	+ 40,70	
	— (1,8)	+ 7,5	— 13,50	+(23,6)	+ 2,2	+ 51,92	
B	0,0	— 9,8	0	+ 26,0	+ 1,8	+ 46,80	
B	0,0	— 33,3	0	0,0	— 2,2	0	
	— 2,2	+ 4,8	— 10,56	+ 2,3	0	0	
	0,0	+ 4,9	0	+ 4,8	+ 3,8	+ 18,24	
	+ 1,6	+ 8,2	+ 13,12	+ 7,2	+ 1,5	+ 10,80	
	+ 1,5	+ 12,4	+ 18,60	+ 13,0	+ 0,1	+ 1,30	
	+ 1,7	+ 13,1	+ 22,27	+ 19,6	— 0,5	— 9,80	
	+ 1,0	+ 12,5	+ 12,50	+ 26,1	— 4,5	— 117,45	
	— (2,8)	+ 9,5	— 26,60	+(32,1)	— 1,0	— 32,10	
C	0,0	— 32,1	0	+ 35,6	+ 2,8	+ 99,68	
C	0,0	— 14,3	0	— 18,1	— 2,0	+ 36,20	
	— 2,0	+ 9,5	— 19,00	— 14,3	+ 0,7	— 10,01	
	+ 0,7	+ 9,3	+ 6,51	— 8,6	+ 3,0	— 25,80	
	+ 1,0	+ 7,5	+ 7,50	— 5,0	— 1,5	+ 7,50	
	— (0,8)	+ 5,0	— 4,00	— (1,1)	— 1,0	+ 1,10	
D	0,0	— 17,0	0	0,0	+ 0,8	0	
D	0,0	— 25,5	0	0,0	— 1,5	0	
	— 1,5	+ 6,6	— 9,90	+ 0,7	+ 1,6	+ 1,12	
	+ 1,6	+ 11,9	+ 19,04	+ 6,6	+ 3,3	+ 21,78	
	+ 1,8	+ 12,8	+ 23,04	+ 12,6	— 0,8	— 10,08	
	+ 0,8	+ 9,0	+ 7,20	+ 19,4	— 0,6	— 11,64	
	+ 1,2	+ 6,8	+ 8,16	+ 21,6	— 0,8	— 17,28	
A	0,0	— 21,6	0	+ 26,2	— 1,2	— 31,44	
		+ 68,6	+1028,21		+ 23,8	+ 337,82	
		— 168,6	— 130,08		— 23,8	—1235,95	
		0	+ 898,13		0	— 898,13	
		$F =$	449,065		$F =$	449,065	

Die I. Rechnung ist hier nach der Formel No. 1 geführt, die II. nach No. 2. Da die letztere das negative Zeichen führt, so ist auch der betreffenden Kernfläche und ihrer Ausgleichung das Zeichen — vorgesetzt, damit nun alle Producte einfach zusammen addirt werden konnten. Nach geschehener Ausgleichung der zwei Kernflächen mussten die Endsummen der beiden Rechnungen absolut genau mit einander übereinstimmen.

Bei der Eintragung der Rechnungselemente musste beachtet werden, dass die Berechnung jedes Schalstücks in dem anfänglichen Verbindungspunkte einer Operationslinie mit einer andern beginnen und in dem endlichen Verbindungspunkte derselben mit der nächstfolgenden Operationslinie schliessen, und dass der Fortschritt in der angenommenen Drehungsweise hier von *A* über *B*, *C*, *D* nach *A* zurück ununterbrochen stattfinden muss, so wie, dass die Abscissen, welche im Sinne dieses Fortschritts zählen, positiv, jene, welche ihm entgegen kommen, wie z. B. die der Linie *CD*, negativ gesetzt, endlich dass die nach Aussen der Figur gerichteten Ordinaten mit dem Pluszeichen, die

nach Innen gerichteten dagegen mit dem Minuszeichen versehen werden müssen.

Sollte sich bei der ersten Summirung der Klammergrössen oder der Flächenproducte wegen eines Versehens die absolute Uebereinstimmung nicht ergeben, so braucht nur, was leichter ausführbar ist, ein Schalstück nach dem anderen nachgesehen zu werden; jedes muss in den beiden Rechnungen gleiche Endresultate ergeben.

§. 20.

Die Rechnungsform für fünf- und mehrseitige Kernfiguren kann nun füglich allgemein ausgesprochen werden.

Hat die Kernfigur m Seiten, so kann sie bekanntlich durch $m - 3$ Diagonalen in $m - 2$ Dreiecke zerlegt und die doppelte Fläche jedes desselben durch Multiplikation der in Originalmaassen gegebenen Grundlinie mit der von der Karte gegriffenen Höhe gefunden werden. Es ist aber nöthig unter diesen m Originalmaassen eine Auswahl zu treffen, damit die Resultate so genau als möglich werden, wir wählen also die $m - 2$ kleinsten Kernseiten aus und ziehen von dem in der angenommenen Umdrehungsweise zuerst auftretenden Endpunkte der ersten von den beiden längsten Seiten nach dem Anfangspunkte der zweiten eine Diagonale. Die Perpendickel, welche von den beiden Endpunkten dieser Diagonale nach den $m - 2$ kürzereren Seiten gezogen werden, sind der Reihe nach die von der Karte zu greifenden Factoren der letzteren zu einer doppelten Berechnung des Flächen-Inhalts. Dieses Verfahren ist jedoch in dem einen Falle nicht anwendbar, wo die beiden längsten Seiten unmittelbar aneinanderstossen. In diesem Falle ist es nothwendig und auch im ersteren Falle, bei allzu verwickelter Gestalt des Vielecks, rathsam, die Doppel-Rechnung mit Originalmaassen von verschiedenen Summen zu führen und die Differenz der beiden Resultate für die Kernfläche nach dem in den §§. 17 und 18 benutzten Verfahren auszugleichen.

Um ferner die Schalfläche zu berechnen, haben wir zunächst die auf jeder Seite der Kernfigur anfänglich oder endlich coordinirten Punkte durch Abgreifen von der Karte beziehungsweise auch gegen die nachfolgende oder die vorhergehende Seite zu coordiniren. Endlich ist der Schalraum über jeder Seite von ihrem Anfangspunkte beginnend und an ihrem Endpunkte schliessend nach der Formel No. 1 und, wenn man will, nach No. 2 kontrolirend zu berechnen.

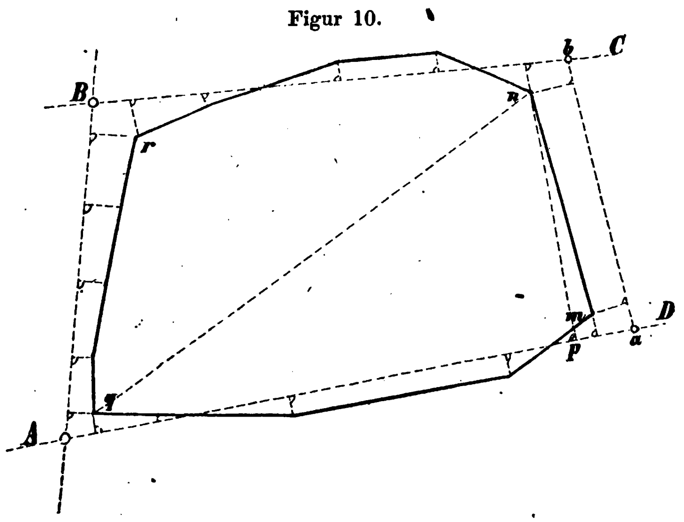
Liegt kein Punkt des zu berechnenden Vielecks von n Seiten in der Kernfigur, so ist die Anzahl der zu bildenden Producte: $n + 2\,(m - 1)$.

Da der Feldmesser die Messungslinien immer so nahe als möglich an den perdendickularisch zu bestimmenden Grenzpunkten entlang legt, so kömmt es in den Vermessungs-Manualen sehr häufig vor, dass von den n Punkten viele in den Seiten oder Ecken der Kernfigur liegen. Für jeden solchen Punkt vermindert sich die Zahl $n + 2\,(m - 1)$ um 1 und die durchschnittliche Anzahl der Producte geht erfahrungsmässig wenig über n hinaus.

§. 21.

Es ist hier endlich noch des besonderen Falles zu gedenken, wo die Kernfigur entweder gar nicht oder in zu grosser Entfernung von dem betreffenden Grundstück geschlossen ist.

Figur 10.



Wäre z. B. das Vieleck der Figur 10 gegen die Messungslinien *AB*, *AD*, *BC* bestimmt, die Kernfigur also an der Seite *CD* gar nicht oder etwa erst bei der sehr entfernten Convergenz der Linien *BC*, *AD* geschlossen; wäre ferner der Punkt *m* der letzte gegen die Linie *AD*, *n* der letzte gegen *BC* bestimmte Punkt und mit der Linie *mn* das seiner Fläche nach zu berechnende Vieleck geschlossen, so könnten wir diesen Fall auf die Voraussetzungen des §. 19 dadurch zurückführen, dass wir in der Nähe von *m* und *n* in den Linien *AD* und *BC* willkührliche Abscissen bei *a* und *b* absetzten, beide Punkte mit einer geraden Linie verbänden und dann die Punkte *m* und *n* durch abgegriffene Coordinaten gegen sie bestimmten. Wir könnten aber auch unsern Zweck noch einfacher erreichen, wenn wir den Punkt *n* durch abgegriffene Coordinaten *Ap* und *pn* gegen die Messungslinie *AD* bestimmten und dann in der Flächenberechnung die Vielecke *qmn* und *qrn* besonders behandelten. Welches Verfahren mit Rücksicht auf die nach §. 17 zu bemessende Genauigkeit das zweckmässigere ist, muss in jedem Falle nach den Dimensionen der Figur besonders beurtheilt werden.

b) Die überwiegende Schnittbestimmung.

§. 22.

Es ist schon in den §§. 12 und 13 beiläufig bemerkt worden, dass bei gewannenweise neben einander liegenden Grundstücken die Zwischengrenzen derselben durch Schnitte (Abscissen, deren Ordinaten = 0 sind) statt durch Abscissen und abgesetzte Ordinaten bestimmt werden. Der einfachste Fall solcher Bestimmung liegt vor, wenn sowohl die Gewannengrenzen als auch

die Grenzlinien der Grundstücke zwischen zwei nächsten Gewannen gerade sind. Der Feldmesser legt dann die beiden zur Bestimmung jener Grenzlinien zureichenden Schnittlinien in die Gewannengrenzen, bindet sie im Polygon oder im Netz der Haupt-, Seiten- und Nebenlinien ein und misst sie, indem er den Abgang der Grenzlinien von den Schnittlinien auf seinem Längenmess-Instrument abliest. Die Flächenberechnung hat es demnach mit einem Viereck zu thun, von welchem zwei Seiten in den Gewannengrenzen und zwei zwischen denselben liegen.

Die durch gedachte Operation sich ergebenden zwei Breitenmaasse eines Grundstücks sind nicht ausreichend, den Flächeninhalt zu berechnen. Wurden aber die Gewannengrenzen auf der Karte festgelegt (§. 13), so können die zur Flächenbestimmung noch erforderlichen Stücke von ihr abgegriffen werden. Ziehen wir in dem Viereck eine Diagonale, so wird es in zwei Dreiecke getheilt, dessen Grundlinien in Originalmaassen gegeben sind. Zu diesen Maassen greifen wir die Perpendickellängen der gegenüberliegenden Dreieckspunkte und erhalten durch Multiplikation der letzteren mit ihnen und durch Addition der beiden Producte den doppelten Flächeninhalt.

Die Diagonale kann nach zwei verschiedenen Richtungen gezogen werden, nämlich, wenn die eine Gewannengrenze dem Rechner links, die andere rechts, das Viereck also der Länge*) nach vor ihm liegt, entweder:

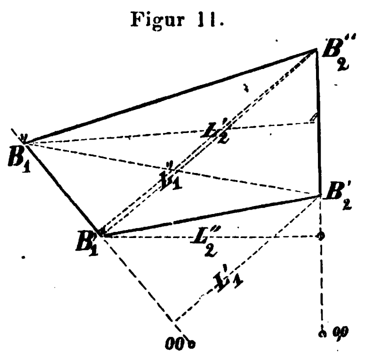
I. linksher = rechtshin (von links der Jenseite nach rechts der Diesseite)

II. linkshin = rechtsher (von links der Diesseite nach rechts der Jenseite).

Je nachdem die eine oder die andere Diagonale gezogen wird, werden die Perpendickellängen verschieden ausfallen. Die Flächen der beiden Dreieckspaare sind bei absoluter Genauigkeit der Factoren einander gleich. Die Verlegung der Diagonale giebt also eine Kontrole an die Hand.

Um Unregelmässigkeiten vorzubeugen, nehmen wir an, dass beide Rechnungen an der linken Seite der Figur beginnen, an der rechten endigen sollen, dass also die links liegende Gewannenlinie als die erste, die rechts liegende als die zweite Schnittlinie betrachtet werden soll, endlich dass die erste Berechnung der linksher-Diagonale, die zweite der linkshin-Diagonale entspricht.

Figur 11.



*) Das Wort Länge ist hier nur im Gegensatze zu dem Breitenmaasse auf den Gewannenlinien genommen. Diese Länge des Vierecks kann also auch kürzer sein als seine Breite.

In der Figur 9 entsprechen von dem Anfangspunkte der Zählung (0,0) gerechnet B_1' und B_1'' den Breitenmaassen auf der ersten, B_2' und B_2'' den auf der zweiten Schnittlinie. Diese Maasse sind also auszudrücken durch:

$$B_1'' - B_1' \text{ und } B_2'' - B_2'$$

Ihnen treten nun als Factoren bei:

I. für die linksher-Diagonale:

$$L_1' \text{ und } L_2'$$

II. für die linkshin-Diagonale:

$$L_1'' \text{ und } L_2''$$

Die Flächenformel ist demnach:

$$\left.\begin{aligned} 2\,F_4' &= L_1'\,(B_1''-B_1') + L_2'\,(B_2''-B_2') \\ 2\,F_4'' &= L_1''\,(B_1''-B_1') + L_2''\,(B_2''-B_2') \end{aligned}\right\} \text{ alle Factoren positiv genommen.}$$

Da die Original-Factoren in beiden Rechnungen dieselben sind, so kann aus den Resultaten der letzteren das einfache arithmetische Mittel genommen werden.

Vor der Multiplikation können wir uns für die Klammergrössen eine Rechnungs-Kontrole verschaffen; es ist nämlich:

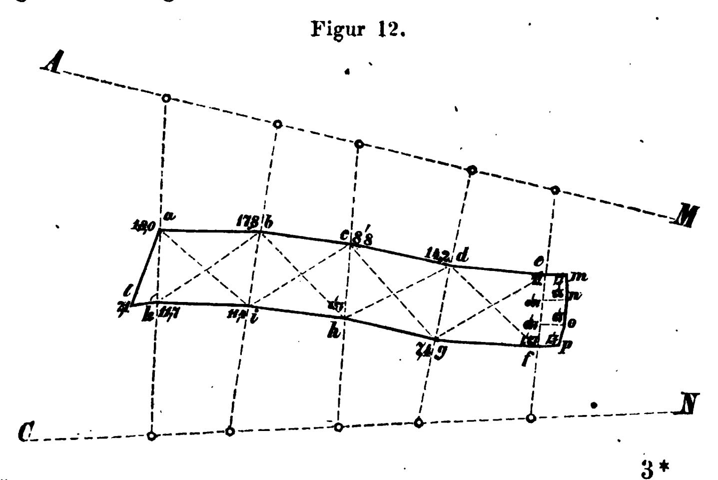
$$(B_1''-B_1') + (B_2''-B_2') = (B_1''+B_2'') - (B_1'+B_2')$$

§. 23.

Laufen aber, wie es z. B. bei Ackerstücken der gewöhnliche Fall ist, die Grenzlinien zwischen den Gewannen nicht gerade, so muss der Geometer mehr als zwei Schnittlinien anwenden.

Zwar könnte immer die Figur zwischen zwei nächsten Schnittlinien als ein nach §. 22 zu behandelndes Viereck betrachtet werden; aber auf die Schnittlinien zwischen den beiden Gewannengrenzen fallen die Perpendickel von beiden Seiten her und je zwei von ihnen beziehen sich immer auf dasselbe Breitenmaass. Die Benutzung dieses Umstandes gewährt eine beträchtliche Rechnungs-Abkürzung.

Figur 12.



Abgegriffene Maasse.

$$L_1' = \frac{i}{a\ k} = \ \ 7{,}4;\quad L_1'' = \frac{b}{a\ k} = \ \ 8{,}5$$

$$L_2' = \frac{a+h}{b\ i} = 17{,}0;\quad L_2'' = \frac{k+c}{b\ i} = 16{,}0$$

$$L_3' = \frac{b+g}{c\ h} = 16{,}3;\quad L_3'' = \frac{i+d}{c\ h} = 17{,}5$$

$$L_3' = \frac{c+f}{d\ g} = 17{,}7;\quad L_4'' = \frac{h+e}{d\ g} = 16{,}1$$

$$L_4' = \frac{d}{e\ f} = \ \ 8{,}0;\quad L_5'' = \frac{g}{e\ f} = \ \ 9{,}0$$

In der Figur 12 sind fünf Schnittlinien angewendet, um ein Ackerstück aufzunehmen. Die 1., 2. und 4. dieser Linien zählen von unten nach oben, die 3. und 5. von oben nach unten. Die erste und die letzte dieser Messungslinien liegen nicht genau in den Gewannengrenzen und wurden die über jene hinausfallenden Grenzpunkte der letzteren, nämlich *l* und *m*, *n*, *o*, *p* durch Perpendickel gegen sie bestimmt. Diese über die äussersten Schnittlinien hinausfallenden Flächen können als coordinirte Vielecke nach den obigen Regeln besonders berechnet werden.

Um die Fläche des lediglich durch Schnitte bestimmten Theils der Figur zu berechnen, ziehen oder denken wir zunächst in allen zwischen den Schnittlinien liegenden Vierecken die linksherliegenden Diagonalen *ai*, *bh*, *cg*, *df* gezogen und greifen nun die senkrechten Abstände jedes dieser Diagonalpunkte von der betreffenden Schnittlinie, also zunächst den Abstand des Punktes *i* von der Linie *a k* oder ihrer Verlängerung, den wir mit $\frac{i}{a\ k}$ bezeichnen, sodann den Abstand *a* von der *bi*, und den Abstand *h* von der *bi*, addiren beide zusammen und bezeichnen die Summe mit $\frac{a+h}{b\ i}$, ferner die Abstände der Punkte *b* und *g* von der *c h*, deren Summe wir mit $\frac{b+g}{c\ h}$ bezeichnen u. s. w. Diese Abstände, beziehungsweise summarische Abstände sind immer die Factoren der Schnittbreiten *a k*, *b i*, *c h* u. s. w., auf welche sie fallen. Hierauf verfahren wir ebenso mit den Figuren zwischen den linkshin liegenden Diagonalen und bezeichnen die betreffenden Abstände der Reihe nach mit $\frac{b}{a\ k}$, $\frac{k+c}{b\ i}$, $\frac{i+d}{c\ h}$ u. s. w.; sie sind in der zweiten Berechnung die Multiplicatoren der Schnittbreiten *a k*, *b i*, *c h* u. s. w.

Um der Berechnungsformel eine übersichtliche Gestalt zu geben, bezeichnen wir nun:

für die I. Berechnung, also bei linksherliegenden Diagonalen	für die II. Berechnung, also bei linkshinliegenden Diagonalen
$\frac{i}{a\ k}$ mit L_1' und *a k* mit $B_1'' - B_1'$	$\frac{b}{a\ k}$ mit L_1'' und *a k* mit $B_1'' - B_1'$
$\frac{a+h}{b\ i}$ - L_2' - *b i* - $B_2'' - B_2'$	$\frac{k+c}{b\ i}$ - L_2'' - *b i* - $B_2'' - B_2'$
$\frac{b+g}{c\ h}$ - L_3' - *c h* - $B_3'' - B_3'$	$\frac{i+d}{c\ h}$ - L_3'' - *c h* - $B_3'' - B_3'$
u. s. w.	u. s. w.

und schreiben:

$$2\,F' = L'_1\,(B''_1 - B'_1) + L'_2\,(B''_2 - B'_2) + L'_3\,(B''_3 - B'_3) + L'_4\,(B''_4 - B'_4) + L'_5\,(B''_5 - B'_5)$$

$$+\,y_l\,(B''_1 - B'_1) + y_m\,(x_n - x_e) + y_n\,(x_o - x_m) + y_o\,(x_p - x_n) + y_p\,(x_f - x_o).$$

In den beiden Zeilen dieser Formel haben die ersten Glieder der Berechnung der Schnittfigur und der Perpendickel-Bestimmungen gleiche Factoren, nämlich $B''_1 - B'_1$; beide Glieder hätten daher, wie auch der Augenschein lehrt, in eins zusammengezogen werden können, nämlich in

$$(L'_1 + y_l)\,(B''_1 - B'_1)$$

Wir wollen nun die Fläche der Figur 12 aus den gegebenen Maassen berechnen, wobei wir wieder die von der Karte gegriffenen Längen mit Parenthesen bezeichnen.

Die Bildung der Unterschiede $B'' - B'$ kontroliren wir dadurch, dass wir sie in jeder der beiden Berechnungen besonders, also doppelt ausführen.

Figurtheile	I. Berechnung.			II. Berechnung.		
	$B''-B'$	L'	Producte	$B''-B'$	L''	Producte
Geschnittener Theil	6,3	(7,4)	46,62	6,3	(8,5)	53,55
	6,4	(17,0)	108,80	6,4	(16,0)	102,40
	6,4	(16,3)	104,32	6,4	(17,5)	122,00
	6,8	(17,7)	120,36	6,8	(16,1)	109,48
	6,5	(8,0)	52,00	6,5	(9,0)	58,50
Sa: a =			432,10			435,93

Figurtheile	I. Berechnung.			II. Berechnung.		
	$B''-B'$	L'	Producte	$B''-B'$	L''	Producte
Coordinirter	y			x		—
Theil (k)	0,0	— 6,3	0	+ 11,7	+ 2,1	+ 24,57
(l)	+ 2,1	+ 6,3	+ 13,23	+ 11,7	0,0	0
(a)	0,0	0,0	0	+ 18,0	— 2,1	— 37,80
(e)	0,0	— 6,5	0	+ 7,2	+ 1,7	+ 12,24
(m)	1,7	+ 2,8	+ 4,76	+ 7,2	+ 2,2	+ 15,84
(n)	2,2	+ 4,7	+ 10,34	+ 10.0	+ 0,2	+ 2,00
(o)	1.9	+ 3,7	+ 7,03	+ 11,9	— 0,5	— 5.95
(p)	1,7	+ 1,8	+ 3,06	+ 13,7	— 1,9	— 26,03
(f)	0,0	— 6,5	0	+ 13,7	— 1,7	— 23,29
		+ 19,3	+ 38.42		+ 6,2	+ 54,65
		— 19,3	0		— 6,2	— 93,07
Sa: b =		0	+ 38,42		0	+ 38,42
$a + b = 2\,F$			470,52	$= 2\,F''$		474,35
F			235,26	F''		237,18

Mittel = 236,42.

Das vorliegende Fünfzehneck ist also bei der ersten Berechnung in 10, bei der zweiten in 13 Producten berechnet worden. Es hätten nach der obigen Bemerkung in der I. Rechnung noch ein Product, in der II. Rechnung zwei Producte erspart werden können, wenn der Perpendickel für l der Perpendickellänge für 6,3 zugerechnet, also das erste Product der I. Berechnung = 6,3 × 9,5,

das der II. Rechnung $= 6{,}3 \times 10{,}6$ gesetzt worden wäre. Diese Ziehung kann in der Praxis füglich dadurch geschehen, dass für die erste Schnittbreite die Perpendickelsumme gleich auf der Karte von l bis i und von l bis b gegriffen wird.

Das Abgreifen der linksher- und linkshin-Perpendickellängen von der Karte geschieht am bequemsten mit Hülfe einer in einzelne Ruthen des üblichen Maassstabes eingetheilten Quadrat-Glastafel. Auf einer solchen Tafel sind die Quadrate von 10 zu 10 Ruthen mit etwas stärkeren oder anders gefärbten Linien ausgezeichnet, auch sind von der linken unteren Ecke nach rechts und nach oben, also im Sinne der beiden Coordinaten-Achsen die Zahlen 0, 10, 20, 30 u. s. w. beigeschrieben, endlich sind die Punkte, wo sich die Quadrate von 5 zu 5 Ruthen schneiden, bemerklich gemacht.

Geübte Rechner schätzen innerhalb der Distance von einer Ruthe den einzelnen Fuss mit ziemlicher Sicherheit und das ist für den vorgedachten Zweck hinreichend, weil die Perpendickellängen die Schnittbreiten fast immer bedeutend übertreffen.

Um den Gebrauch einer solchen Tafel an unserer Figur zu zeigen, bemerken wir, dass für den linksher-Perpendickel des Punktes i über der $a\,k$ die Länge sogleich gefunden wird, wenn wir mit der Grundlinie der Glastafel die Schnittbreite $a\,k$ decken und auf der linksseitigen von unten nach oben zählenden Randlinie den Abstand der Spitze i über der Grundlinie ablesen; ferner für den linksher-Perpendickel von a bis h, wenn wir mit einer Linie der Glastafel die zweite Schnittlinie $b\,i$ decken, dann die Tafel neben einem an ihre Seite gedrückten Lineal so weit (parallel) herabschieben, bis die Grundlinie der Tafel den Punkt a deckt, und dann den senkrechten Abstand des Punktes h von dieser Grundlinie ablesen. Es ist also eine sehr einfache und in kurzer Zeit ausführbare Operation, zuerst der Reihe nach alle linksher- und demnächst alle linkshin-Perpendickel auf der Karte abzuschieben und abzulesen.

Obgleich die Summe der Schnittbreiten als Originalmaassen für beide Rechnungen dieselbe ist, so folgt doch keineswegs, dass auch die Summe der L' der der L'' gleich sei. Liegen aber die Schnittlinien nur wenig divergent gegen einander, so kommt die erste Summe der zweiten nahe genug, um die Vergleichung beider vor der Multiplikation als ein Schutzmittel gegen grobe Ablesungs-Irrthümer benutzen zu können.

§. 24.

Wollen wir die Formel für die Flächenberechnung aus Schnittbestimmungen allgemein aussprechen, so brauchen wir der etwa vorkommenden perpendikularischen Bestimmungen an den Gewannengrenzen nicht zu gedenken, weil diese immer nach einer der Formel No. 1 oder 2 besonders behandelt werden müssen; wir nehmen also an, eine Figur sei durch n Schnittlinien so bestimmt, dass die erste und die letzte derselben sie zugleich begrenzen. Die erste Flächenberechnung soll bei Voraussetzung der linksherliegenden Diagonalen geführt werden, und die der ersteren Lage der Diagonalen entsprechen-

den Perpendickellängen sollen der Reihe nach mit L'_1, L'_2, L'_3 u. s. w., die der zweiten angehörigen mit L''_1, L''_2, L''_3 u. s. w., das bei je einer Schnittbreite grössere Schnittmaass endlich soll auf der betreffenden Messungslinie mit B'', das kleinere mit B' bezeichnet sein. Die Flächenformeln sind dann:

$$2\,F'_n = L'_1\,(B''_1 - B'_1) + L'_2\,(B''_2 - B'_2) + L'_3\,(B''_3 - B'_3) + \ldots L'_n\,(B''_n - B'_n) \qquad \text{No. 17.}$$

$$2\,F''_n = L''_1\,(B''_1 - B'_1) + L''_2\,(B''_2 - B'_2) + L''_3\,(B''_3 - B'_3) + \ldots L''_n\,(B''_n - B'_n) \qquad \text{No. 18.}$$

Man kann bemerken, dass diese Rechnungsformen eine Ungewissheit selbst für den Fall nicht enthalten, dass der zweite Rechner die Karte umgekehrt legt, im Vergleiche zu der Lage, wie der erste sie in die Hand nahm, wenn nur keiner von ihnen zwischen seinen beiden Operationen, der Breiten-Ablesung und der Abmessung der Perpendickellängen eine Verwechselung in der Lage der Karte vornimmt.

III. Allgemeine Bemerkungen.

1. In den obigen Rechnungsbeispielen ist jedesmal das Schema des Berechnungs-Registers dem besonderen Stoffe angepasst und dadurch eine Mannigfaltigkeit der Schematen entstanden, welche bei ausgedehnten Vermessungen vermieden werden muss, weil äussere aber wichtige Motive verlangen, dass die Rechner sich einer völligen, äusseren Gleichförmigkeit ihrer Arbeit befleissigen. Das Rechnungsformular muss also so allgemein gehalten sein, dass jede der obigen Formeln sich in seinen Spalten ohne Schwerfälligkeit und Undeutlichkeit bewegen kann. Ein solches Schema ist meines Erachtens das nachstehende:

Bezeichnung der Figur	I. Berechnung.			II. Berechnung.			Resultat
	Factoren		Product	Factoren		Product	
1	2	3	4	5	6	7	8

Für Perpendikular-Bestimmungen, wobei die Formeln No. 1 und 2 zugleich angewendet werden sollen, setzt man die Ordinaten y_k in die Spalte 2, die zugehörigen Abscissen in die Spalte 5, ferner in die Spalte 3 die übersprünglichen Abscissen-Unterschiede $x_{k+1} - x_{k-1}$, in die Spalte 6 die übersprünglichen Ordinaten-Unterschiede $y_{k+1} - y_{k-1}$, jede Zahl mit dem ihr nach der Figur und der angenommenen Zählungsweise, so wie nach den in den Spalten 3 und 6 vorgegangenen Subtractionen gebührenden Zeichen, in die Spalten 4 und 7 die den Factoren und ihren Zeichen entsprechenden Producte, in die Spalte 8 die durch Halbirung der Producten-Summen entstehenden, und in die landesüblichen Flächeneinheiten (Morgen, Ruthen, Fuss) ausgedrückten

Flächen. Ebenso wenig Schwierigkeiten hat es, die Formeln No. 3, 4, 5, 6, 7 in diesen Spalten unterzubringen.

Bei Anwendung der Formeln No. 9 bis 16 werden in die Spalte 2 die B, in 5 die x, in 3 die $x_{k+1} - x_{k-1}$, in 6 die $B_{k+1} - B_{k-1}$ gesetzt.

Die Formeln No. 17 und 18 unterscheiden sich von den Formeln No. 9 bis 12 nur dadurch, dass an die Stelle der Abscissen-Unterschiede die Perpendickellängen treten.

Die Breiten werden zweimal aus dem Manuale extrahirt und das einemal in die Spalte 2, das andermal in 5 gesetzt. In der Spalte 3 finden dann die Perpendickellängen der linksher-, in 6 die der linkshinliegenden Diagonalen Aufnahme.

2. Aus den obigen Auseinandersetzungen geht hervor, dass bei einer lediglich oder überwiegend auf Originalmaasse gegründeten Flächenberechnung einer Figur von n Seiten nicht viel mehr und nicht viel weniger als n Producte gebildet werden müssen. Der Kartirer hat ohne Zweifel mehr zu thun als der Rechner; er muss die trigonometrischen Punkte, das Umfangspolygon auftragen, die Haupt-, Seiten- und Nebenlinien einpassen und dann für jeden der n Punkte die Abscissen oder Schnitte greifen und, so weit sie durch Perpendickel bestimmt sind, die Ordinaten errichten, ihre Längen absetzen, demnächst die Grenzlinien scharf ziehen und die Karte illuminiren, nummeriren und beschreiben.

Wenn nun der Kartirer so viel an den n Punkten jedes Grundstücks zu thun hat, so liegt die Frage nahe: warum sollte nicht auch der Rechner jede Bestimmungszahl zweimal ansehen, in sein Flächenberechnungs-Register eintragen und nach gehöriger Verbindung unter ihnen durch Multiplication und Addition Flächenresultate suchen müssen, welche entweder mit der Vermessung vollkommen übereinstimmen oder an Genauigkeit so wenig als möglich einbüssten?

Wenn eine Landesvermessung noch so gute Karten geliefert hat, aber eine ungenaue Flächenberechnung, so sind die Grundbesitzer übel berathen, denn gerade die Resultate der letzteren gehen in ihre öffentlichen Verhandlungen über das Grundeigenthum über.

3. Für die Organisation eines Vermessungs-Personals ist es von grosser Wichtigkeit, dass Anfänger nicht eher zu selbstständigen Feldarbeiten zugelassen werden, bis sie im Kartiren und im Flächenberechnen vollständig eingeübt sind. Hat der Anfänger in diesen Arbeiten Fertigkeit erlangt, so kann er beurtheilen, was zu einer treuen kartlichen Darstellung gehört und was überflüssig ist und erspart werden kann. Diese Urtheilskraft ist auch für die Berechnung der Flächen von grosser Wichtigkeit insbesondere da, wo die Grenzen nicht in geraden Linien, sondern, wie z. B. an Gewässern, Hecken und Wällen, in Bogenlinien bestehen, welche durch mehr oder weniger kurzseitige Vieleckszüge vertreten werden müssen. Der im Kartiren und Berechnen ungeübte Feldarbeiter verfällt entweder in Flüchtigkeit, bestimmt in diesen Zügen zu wenig Punkte und liefert ein Zerrbild, oder er geräth in ängstliche Pedanterie, nimmt am Flusse jedes vorübergehende Uferloch, in der Hecke jeden Strauch auf und erschwert die Kartirung und Berechnung in hohem Grade und ohne Nutzen. Ist aber der Feldarbeiter mit jenen Arbeiten vertraut, so weiss er überall die richtige Mitte zwischen Oberflächlichkeit und Grübelei zu treffen; er weiss auch, welche Bestimmungen er über das einseitige Interesse der Kartirung hinaus herzustellen hat, um auch dem Rechner das Geschäft so leicht als möglich zu machen (§. 11) und damit dem ganzen Vermessungswerk einen wesentlichen Dienst zu leisten; er wird sich endlich bemühen, sein Manual so deutlich und so naturgetreu als möglich zu führen, damit der Kartirer und der Rechner dasselbe so leicht und so sicher zu lesen vermögen, als er selbst.

Inhalt.

Berichtigungen.

Seite 12 Zeile 12 und 17 von oben statt F_n ist zu lesen: 2 F_n.

" " In der nach Zeile 19 folgenden Berechnung stehen die Nummern 1. 2. 3. 4. 5. 6. um eine halbe Zeile zu hoch.

" 14, Zeile 5 von unten statt F_n ist zu lesen 2 F_n.

